

2

Geschichte

des

Isoperimetrischen Problems,

eine geschichtliche Darstellung
der Variationsrechnung von Bernoulli bis Lagrange.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig
eingereicht von
Ludwig Anton.

3

Dresden,
Lehmannsche Buchdruckerei.
1888.

Geschichte

Isoperimetrischen Problems

eine geschichtliche Darstellung

der Variationsrechnung von Bernoulli bis Lagrange

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

an der philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

Ludwig Anton

Dresden

Verlag von C. Neumann, Neudamm

Inhalt.

Einleitung pag. 1

Erster Abschnitt: Die analytisch-geometrischen Lösungen des
isoperimetrischen Problems.

Erstes Kapitel: Streit zwischen Jacob und Johann Bernoulli " 6

Zweites Kapitel: Jacob Bernoulli " 11

Drittes Kapitel: Johann Bernoulli " 20

Viertes Kapitel: Brook Taylor " 25

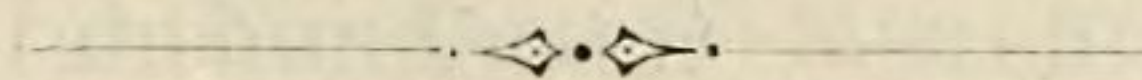
Fünftes Kapitel: Colin Maclaurin " 29

Sechstes Kapitel: Die Arbeiten Leonhard Eulers bis zum
Jahre 1760 " 37

Zweiter Abschnitt: Einführung des Variationskalküls.

Siebentes Kapitel: Lagrange " 55

Achtes Kapitel: Die Schriften Eulers über Variationsrechnung " 69



Inhalt

1	Einleitung
2	Die Bedeutung der Kunst
3	Die Kunst der Antike
4	Die Kunst des Mittelalters
5	Die Kunst der Renaissance
6	Die Kunst des Barock
7	Die Kunst des 18. Jahrhunderts
8	Die Kunst des 19. Jahrhunderts
9	Die Kunst des 20. Jahrhunderts
10	Die Kunst der Gegenwart

Einleitung.

Die mathematischen Untersuchungen haben, was Inhalt und Form betrifft, im Verlaufe der Jahrhunderte vielfache Änderungen erfahren. Der rein synthetischen Behandlungsweise der Alten stellte Cartesius die analytische Methode zur Seite, indem er Regeln über die allgemeine Grössenbestimmung ableitete und eine Rechnungsart zur Untersuchungsmethode einführte, die den Namen Analysis bekam. Diese Analysis, zunächst noch im Bunde mit den anschaulichen geometrischen Betrachtungen, löst sich bald von denselben los und geht selbständig in abstrakter Weise vor. Ein solcher Wechsel in den Methoden, charakteristisch für die ganze Entwicklung der Mathematik, wiederholt sich nun in jedem besonderen Teile: und so hat jeder Teil der Mathematik seine eigene Geschichte.

Wer aber Schritt für Schritt den Fortschritten folgt, welche die Analysis gemacht hat, der wird erkennen, welchen wunderbaren Zusammenhang zwischen der Analysis von heute und der von vor Jahrhunderten besteht, wie die einfachen und allgemeinen Methoden aus besonderen Fragen und aus indirekten und sehr komplizierten Einzelerfolgen entstehen.

Eine derartige Geschichte besitzt ein Problem, welches über ein Jahrhundert die Gelehrten beschäftigt und zu wissenschaftlichem Wettstreit herausgefordert hat: Das isoperimetrische Problem. Verstand man ursprünglich darunter nur jene ganz spezielle, schon im Namen liegende Aufgabe: „Eine Kurve zu suchen, der unter allen Kurven gleichen Perimeters eine grösste oder kleinste Eigenschaft zukommt.“ so verallgemeinerte man sie bald und bezeichnete mit Isoperimeterproblem alle jene Aufgaben, in denen eine Maximal- oder Minimaleigenschaft bestimmt werden sollte, besonders als man erkannte, dass jene spezielle Aufgabe auf diese allgemeinere stets zurückgeführt werden konnte, bis dann für

diesen ganzen Zweig der Analysis der Name „Variationsrechnung“ aufkam. Eine Geschichte des isoperimetrischen Problems wird darum zugleich eine Geschichte der Variationsrechnung sein. Es ist die Aufgabe der gegenwärtigen Abhandlung, an dem isoperimetrischen Problem zu versuchen, den inneren Gang und die Entwicklung der einzelnen Methoden zu geben, die zu der späteren, eigentlichen Variationsrechnung geführt haben.

Eine solche Geschichte spaltet sich aber augenscheinlich in zwei Teile:

1. Die Geschichte der analytisch-geometrischen Methode.
2. Die Geschichte der aus den Sätzen der reinen Analysis sich ergebenden abstrakten Methode.

Das sind auch die beiden Teile, welche wir unsrer Abhandlung zu Grunde legen wollen. Wir werden den ersten Teil nochmals in zwei Abschnitte teilen können, wenn wir die speziellen Ableitungen spezieller Aufgaben ohne die Angabe allgemeiner Methoden trennen von den Arbeiten, welche die früheren Resultate verallgemeinern: indem wir dort die Lösungen des Jacob und Joh. Bernoulli, des Taylor und des Maclaurin, hier aber Eulers Schriften bis zum Jahre 1760 in Betracht ziehen. Im zweiten Teil wird zunächst die Einführung des Variationskalküls durch Lagrange berücksichtigt werden müssen, woran sich weiter die Lösungen Eulers unter Zugrundelegung dieses Kalküls schliessen. —

Verfasser hat sich bestrebt, überall nach den Quellen zu arbeiten, und von Schriften, welche denselben Gegenstand betrachten, waren dem Verfasser zugänglich:

a) allgemeinen Inhalts:

1. *C. Bossut*, Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik.
2. *A. G. Kästner*, Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des 18. Jahrhunderts.
3. *Gerhard*, Geschichte der Mathematik in Deutschland. Band 17 der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland.

b) spezielleren Inhalts:

1. *H. Gräffe*, Commentatio historiam calculi variationum inde ab origine calculi differentialis atque integralis usque ad nostra tempora complectens. Göttingen 1825.
2. *F. Giesel*, Geschichte der Variationsrechnung. 1. Teil. Torgau 1857.

3. *J. Todhunter*, A history of the progress of the calculus of variations. Cambridge 1861.

4. *M. Guiraudet*, Aperçu historique sur l'origine et les progrès du calcul des variations, jusqu'aux travaux de Lagrange. Lille 1862.

5. *E. Mach*, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Band 59 der internat. wiss. Bibl. 1883.

6. *R. Reiff*, Die Anfänge der Variationsrechnung. Vortrag gehalten zu Plochingen 1883; abgedruckt in den mathem.-naturwiss. Mitteilungen Band II, 2. —

Unter der hier angegebenen Litteratur fehlt ein Werk, welches ich mir nirgendsher habe verschaffen können: Woodhouse, A treatise on isoperimetrical Problems and the Calculus of Variations. Cambridge 1810. Indessen nach einer Bemerkung, welche Todhunter in seiner history macht, kommt die Gieselsche Schrift der im Buchhandel völlig vergriffenen englischen Geschichte nahe gleich. —

Die Kritik über die von Jacob Bernoulli erhaltene Lösung (im zweiten Kapitel) beruht wesentlich auf kurzen Angaben, die sich in der Schrift: „Remarques sur ce qu'on a dit etc.“ von Johann Bernoulli, Scholion II, finden.

Johann Bernoullis Lösung vom Jahre 1718 (im dritten Kapitel) ist, der heutigen Bezeichnung entsprechend, abgeleitet worden. Johann Bernoulli giebt keine Ausdrücke an, in denen Sinus und Tangente von Winkeln eine Rolle spielen, sondern er führt neue, jetzt nicht mehr gebräuchliche Funktionszeichen ein, um dieselben gleichförmigen Formeln zu erhalten, die wir gefunden haben. Gräffe hält streng an der Bernoullischen Bezeichnung fest, es scheint aber zu weit-schweifig zu sein, sich an andere Funktionen zu gewöhnen, wo doch die uns sehr gebräuchlichen trigonometrischen Funktionen dasselbe Ziel erreichen lassen.

Übrigens wird diese Schrift bei Gräffe und Giesel nur kurz behandelt; sie hat vielleicht auch nicht den Wert, den Jacobs Analysis besitzt, da sie auf den Prinzipien der letzteren beruht.

Taylor's allgemeine Lösung (im vierten Kapitel) wird von Giesel gar nicht und von Gräffe kurz — auf $\frac{3}{4}$ Quart-seite — und in der Fluxionenbezeichnung besprochen. Guiraudet erwähnt wohl, dafs sich Taylor mit isoperimetrischen Fragen beschäftigt hat, aber seine ganze Kritik ist eine ab-sprechende; er sagt darüber im dritten Abschnitt seines Aperçu: „Indem Taylor die lange und schwülstige Analyse in der Arbeit Jacob Bernoullis abzukürzen suchte, ward er

fast unverständlich. Es ist fast unmöglich, überallhin dem zu folgen, was er sagt. In diesen Fehler verfällt er übrigens oft, wenn er kurze Darstellung geben will.“

Die Ableitung von schon früher gelösten Problemen aus soeben erhaltenen Resultaten — z. B. die Herbeiführung der Bernoullischen beiden Probleme aus der Taylor'schen Lösung und späterhin der letzteren aus den Eulerschen Formeln oder dieser aus den Lagrange'schen Gleichungen — bezweckt, den Fortschritt hervorzuheben, den die Behandlung des isoperimetrischen Problems genommen hat: wie aus Einzelfragen sich nach und nach das ganze Gebäude der Variationsrechnung gebildet hat.

Von den drei Eulerschen Schriften, die im sechsten Kapitel ihre Besprechung finden, scheint die erste vielleicht merkwürdigerweise zu eingehend behandelt worden zu sein im Vergleich zu dem berühmten Werke „*Methodus inveniendi etc.*“ Da indessen das letztere in Giesels Arbeit einer sehr genauen und vorzüglichen Beurteilung unterzogen worden ist, so sind hier nur die wichtigsten Gesichtspunkte angeben, während dem ersten Memoire „*Problematis isoperimetrici etc.*“ eine sorgfältigere Betrachtung gewidmet ist. Diese Schrift ruht nämlich noch ganz auf dem Prinzip, welches die beiden Bernoulli allen isoperimetrischen Problemen zu Grunde gelegt haben: „Gilt die M_a -Eigenschaft auf der ganzen Kurve, so gilt sie auf jedem kleinen Teil derselben.“ Nimmt man das Prinzip als richtig an, so ist die Lösung des isoperimetrischen Problems hier in einer Allgemeinheit gegeben, an die Bernoulli 30 Jahre früher kaum gedacht haben kann. Eulers Abhandlung bringt die allgemeinste und letzte Anwendung des Bernoullischen Grundgedankens. Nur wenige Jahre später erkennt schon Euler bei einer weiteren Verallgemeinerung der Probleme den Hauptfehler der früheren Methoden, und die zweite Schrift bringt die Wendung.

Die Bemerkungen am Schlusse dieses Kapitels über die Lösungen von Euler, Taylor und Bernoulli knüpfen an einige, von Lagrange in den „*Leçons sur le calcul des fonctions*“ (Oeuvres, t. X, pag. 393) aufgeworfene Fragen an.

Was das siebente Kapitel „Lagrange“ betrifft, so giebt Giesel nur den Inhalt des „*Essai d'une nouvelle méthode etc.*“, Todhunter nur den der „*Théorie des fonctions analytiques*“ und der „*Leçons sur le calcul des fonctions*“ an. Die vorliegende Abhandlung versucht, auch den übrigen Schriften, soweit sie sich auf Variationsrechnung beziehen, und welche

ziemlich zerstreut den Gesamtwerken des Lagrange sich einfügen, gerecht zu werden.

In der Litteratur werden die späteren Schriften Eulers (im achten Kapitel) kurz betrachtet, als ob sie nicht ebenso bahnbrechend geworden wären, wie die des Lagrange. Indessen Euler und Lagrange müssen gleichzeitig als Erfinder der Variationsrechnung bezeichnet werden. Die Fragen über den Unterschied zwischen dem Differential- und Variationskalkül, welche die Analytiker unseres Jahrhunderts so sehr beschäftigt haben, und um die sich Lagrange nicht gekümmert hat, sind zuerst von Euler aufgeworfen und zu beantworten versucht worden.



Erster Abschnitt.

Die analytisch-geometrischen Lösungen des isoperimetrischen Problems.

Erstes Kapitel.

Streit zwischen Jacob und Johann Bernoulli.

Schon im Altertum beschäftigte man sich mit isoperimetrischen Aufgaben; und zwar war man darauf gekommen durch die Idee: „Bei den Kräften der Natur ist immer ein Minimum zu finden.“ Nicht zum Mindesten hatte zu einer solchen Annahme die Beobachtung der Bienen beigetragen, die ihre Zellen so bauen, daß bei einem passend kleinsten Umfang der größte Inhalt erzielt wird.

Derartige Betrachtungen führten auf isoperimetrische Aufgaben, deren Lösungen durch ein rein geometrisches Verfahren erhalten wurden. So soll schon Pythagoras erkannt haben, daß der Kreis unter allen Figuren desselben Umfanges die größte Fläche einschließt; und so gab Pappus in seinem „*μαθηματικαὶ συναγωγαί*“ durch einfache geometrische Betrachtungen eine Reihe höchst interessanter Sätze über die Isoperimetrie.

Im 14. Jahrhundert hatten sich italienische Mathematiker mit schwierigeren isoperimetrischen Problemen beschäftigt, jedoch unter Anwendung algebraischer Hilfsmittel; und erst das 17. Jahrhundert brachte einen neuen Aufschwung in der Behandlung, als Jacob Bernoulli seinen Zeitgenossen das Problem vorlegte: „Unter allen, zwischen 2 festen Punkten gelegenen, isoperimetrischen Kurven diejenige zu finden, welche nicht sowohl selbst die größte Fläche einschließt, sondern bewirkt, daß die größte Fläche durch eine andere Kurve eingeschlossen werde, deren Ordinaten Funktionen der zu denselben Abscissen gehörigen Ordinaten oder Bögen der zu suchenden Kurve sind.“

Die Lösung eines solchen Problems war erst möglich, nachdem die Methode der Differential- und Integralrechnung den Forschern neue Bahnen zur Untersuchung geöffnet hatte, und als vor Allem die Analysis die Lösungen der Probleme auf die Anwendung des Infinitesimalkalküls zurückführte.

Das erste Problem, in welchem die Frage nach einer solchen Kurve auftauchte, in der gewisse, von jeder Lage der Kurve abhängige Grössen ein M_a^i in Bezug auf alle anderen Kurven werden, stammt aus der Mechanik. Und zwar war hier Newton*) der erste, der eine Kurve suchte, welche, um eine Achse gedreht, eine solche Oberfläche begrenzt, daß sie bei Bewegung derselben in der Richtung der Achse den kleinsten Widerstand erleidet. Indessen wenn er auch einige Merkmale gesammelt hat, welche die Kurve durch ihre Tangenten konstruieren lassen, so fehlt doch der Beweis von der Richtigkeit der ausgeführten Konstruktion. Das Prinzip von Newtons Auflösung ist, daß eine M_a^i -Eigenschaft, welche einer ganzen Kurve zukommt, auch einem unendlich kleinen Teile derselben zukommt; ein Prinzip, welches die Grundlage für alle folgenden Probleme vom Größten und Kleinsten gebildet hat. So griff 1693 Jacob Bernoulli darauf zurück, als auch er eine Aufgabe der Mechanik zur Behandlung vorlegte. Es war die Frage nach der Brachistochrone: auch eine M_a^i -frage, indem es sich um die Auffindung der Kurve handelt, auf welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von einem höheren gegebenen Punkt zu einem tiefer gelegenen fällt. Analytisch ist sein Verfahren. Er nimmt an, die Kurve sei gefunden, und betrachtet dann zwei benachbarte Elemente derselben, die er in ein solches Verhältnis zu bringen sucht, daß die vorgelegte GröÙe ein M_a^i werde. Er benutzt hier den Gedanken des Infinitesimalkalküls, daß man jede Kurve als Aufeinanderfolge unendlich kleiner Geraden auffassen darf; und indem er zwei solche benachbarte Gerade ins Auge faßt, variiert er die Ordinate der gesuchten Kurve. Auf diese Weise kommt er zu einem Resultat, das geometrisch gedeutet vorliegt, und es handelt sich zum Schluß darum, dasselbe noch auf Differentialformen zurückzuführen.

Seine Methode ergab als Brachistochrone eine solche Kurve, welche immer die Eigenschaft besitzt, daß der Sinus des Winkels, den eine ihrer unendlich kleinen Seiten mit der vertikalen Richtung bildet, proportional der Geschwindigkeit des fallenden Körpers in dem betreffenden Punkte sei. Diese

*) Principia, lib. II, prop. 34.

Proportion in eine Differentialgleichung umgesetzt — wobei zu bedenken ist, daß die Geschwindigkeit in jedem Punkte sich verhält, wie die Quadratwurzel aus der Tiefe des betreffenden Punktes unter dem Anfangspunkt — ergibt die Cykloide. Nachdem hierdurch ein neuer Weg zur Lösung derartiger Probleme gezeigt war, ward dieselbe Methode von Johann Bernoulli auf andere mechanische Aufgaben angewendet; und so bestätigte er, daß die Kurve, welche um eine Achse gedreht, eine solche Oberfläche erzeugt, die bei ihrer Bewegung den kleinsten Widerstand erleidet, in der That die von Newton angegebene Eigenschaft besitzt.

Mit der Auffindung der Brachistochrone war eng verbunden die Lösung des von Jacob Bernoulli aufgestellten isoperimetrischen Problems; man hatte damit eine Kurve erhalten, die eine gewisse kleinste Eigenschaft unter anderen Kurven haben sollte.

Im Mai des Jahres 1697 hatte Jacob Bernoulli in den Acta Erud. Lips. den Mathematikern das schon oben angegebene Problem vorgelegt. Mit der ihm eigenen mathematischen Phantasie hatte Johann Bernoulli die Lösung erraten. In einem Briefe an Mr. Varignon theilte er am 15. Oktober desselben Jahres ohne Beweis die Lösung der Aufgabe mit:

$$y = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}},$$

wo a eine Konstante bedeutet. Daraus, daß er für $n = 1$ den Halbkreis

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$

erhielt, schloß er um so mehr auf die Richtigkeit seiner gefundenen Lösung, als ja schon Pappus in den *μαθηματικαὶ συναγωγαί*, βιβλίος 5, den pythagoräischen Satz bestätigt hatte, daß der Halbkreis unter allen Flächen mit demselben Umfang der größte wäre.

Auf diese beweislose Angabe der Lösung erwiderte Jacob — dessen Geistesthätigkeit, im Gegensatz zu der genialen und phantasievollen Künstlernatur seines Bruders, eine nüchterne, kritische und auf Gründlichkeit ausgehende zu nennen ist — am 2. Dezember im Journal de Savants. Drei Fragen regte er zur Beantwortung an:

1. Man solle durch eine richtige Analyse angeben, was seinen Bruder zur Lösung des isoperimetrischen Problems geführt habe.

2. Man solle die Irrtümer aufdecken und veröffentlichen, auf die man stofse.

3. Man solle die wahre Analyse angeben.

In einer kurzen Entgegnung bestritt Johann die Mangelhaftigkeit seiner Lösung; er verbesserte nur einige Fehler in der Anwendung, die er gemacht hatte. War von ihm jedoch früher bemerkt worden, daß der zweite Teil des Problems — in welchem die Ordinaten Funktionen des Bogens der zu suchenden Kurve sind — immer durch Integration einer gewissen Differentialgleichung gelöst würde, die er selbst aber nicht hatte aufstellen können: so gab er jetzt zur Bestimmung der Kurve die Differentialgleichung wirklich an, nämlich

$$v = \int \frac{d^2y}{ds^2 - dy^2},$$

worin er das Bogenelement ds konstant annahm und unter v nicht nur eine gegebene Potenz von s , sondern irgend eine aus dem Bogen s zusammengesetzte Gröfse verstand.

Da der Bruder hartnäckig die Veröffentlichung seiner Methode zurückhielt, so suchte Jacob den Gedankengang derselben zu erraten. Sein Brief an Mr. Varignon vom 26. Juni 1698 giebt uns darüber vollkommen Aufschluß. Hier mutmaßt er, daß Johann wahrscheinlich durch ein fremdes und indirektes Prinzip das Problem gelöst hat. Die Untersuchungen über die Kettenlinie und Segelkurve hatten nämlich das Resultat ergeben, daß eine Kurve BFN, die in B und N festgehalten wird und bis BN in Flüssigkeit eintaucht, eine solche Lage annimmt, bei welcher der Schwerpunkt am tiefsten liegt. Wahrscheinlich, sagt Jacob Bernoulli in jenem Briefe, denkt sich Johann BFN bis zur Basis BN mit einer Flüssigkeit von variablem specifischen Gewicht gefüllt und die Kurve BFN für die tiefste Lage des Schwerpunktes bestimmt. Sei in der Ordinate $PF = y$ das specifische Ge-

wicht der Flüssigkeit $\frac{f(y)}{y}$, so beträgt das Gewicht eines vertikalen Fadens $\frac{f(y)}{y} \cdot dx$, und dessen Moment in Bezug auf BN ist $\frac{1}{2} y \cdot \frac{f(y)}{y} \cdot dx = \frac{1}{2} f(y) \cdot dx$. Die Summe aller dieser Kräfte, d. h. $\frac{1}{2} \int f(y) \cdot dx$

bestimmt nun den Abstand des Schwerpunktes der Flüssigkeit von der Basis BN. Wenn daher der Schwerpunkt am tiefsten liegt, muß auch die Fläche $\int f(y) \cdot dx$ ihren größten Wert erreichen.

Hierbei wird jedoch, wie Jacob Bernoulli bemerkt, nicht

berücksichtigt, daß das Gewicht der Flüssigkeit bei den verschiedenen isoperimetrischen Figuren variiert, wodurch die ganze Beweisführung unzulässig wird. Darin liegt gleichzeitig der weitere Fehler, daß die Entfernung des Schwerpunktes durch die Summe der Kräfte dargestellt wird, wo doch die Summe der Kräfte sich nach dem Gewicht der Flüssigkeit richtet. Eine solche Proportionalität ist nur statthaft, wenn das Gewicht konstant bleibt. Es sei darum, meint Jacob Bernoulli, ein reiner Zufall, wenn trotz der beiden Fehler das richtige Resultat herauskäme: ein Fehler scheine den anderen glücklich zu beseitigen.

Die Erbitterung des Johann Bernoulli stieg nach Veröffentlichung dieses Briefes auf das Höchste, dennoch zögerte er immer noch mit der Herausgabe seines Beweises. Vielmehr übergab er die Methode, welche ihn zur Lösung geführt hatte, versiegelt erst 1701 der Pariser Akademie mit der Bedingung, sie zu öffnen, wenn der Bruder seine Analysis herausgegeben hätte. Sie erschien 1706 in den Akten der Akademie, nachdem Jacob seine Lösung schon 1701 veröffentlicht hatte.

Nunmehr stellte es sich heraus, daß es doch Zufall gewesen war, der Johann Bernoulli zur richtigen Lösung geführt hatte, denn die Methode war falsch.

Johann Bernoulli betrachtet zwei konsekutive Kurvenelemente und glaubt, beiden Bedingungen, der isoperimetrischen und der des M_a^i , gleichzeitig genügen zu können, wenn er zugleich die Abscisse und die Ordinate der Ecke variiert, in der beide Elemente zusammenstoßen. Ist also O die Ecke, welche in den Punkt ω übergeführt wird, und sind FO und Oq die beiden Elemente, so muß

$$FO + Oq = F\omega + \omega q$$

sein, was dadurch erreicht wird, daß O und ω auf der Peripherie einer Ellipse liegen, deren Brennpunkte F und q , und deren große Achse $= FO + Oq$ ist. Dieses Verfahren ist, wie Lagrange*) bemerkt, zweifellos richtig, so lange es sich um endliche Größen handelt; indessen diese endliche Gleichung wird, sobald wir unendlich kleine Größen annehmen, der Natur der unendlich kleinen Größen gemäß, völlig identisch und kann somit nichts zur Lösung beitragen.

Dennoch war das Resultat, welches Johann für das erste Problem erhielt, richtig, obgleich der Weg dazu ein falscher war. Der Fehler lag nicht bloß darin, daß nicht drei konsekutive

*) Leçons sur le calcul des fonctions.

Elemente der Kurve variiert wurden, und daß damit der Grad von Unbestimmtheit fehlte, der zur Variation der Kurve erforderlich war, sondern er beruhte auch in einer falschen Vernachlässigung unendlich kleiner Größen desselben Grades: Dieselben werden nämlich teils weggelassen, teils berücksichtigt. Es ist somit ein reiner Zufall, daß das Resultat des ersten Problems ein so korrektes geworden ist.

Indessen muß man bemerken, daß in der damaligen Zeit Niemand den Mut besaß, den Fehler öffentlich zu tadeln. Jacob Bernoulli hatte das Bekanntwerden der mangelhaften Analyse Johanns nicht mehr erlebt — er war 1705 gestorben — und Johann selbst gestand erst 12 Jahre später ein, daß der Weg zu seiner Lösung falsch gewesen war, indem er sich in einer neuen Ableitung derjenigen Gesichtspunkte bediente, welche Jacob in seiner gründlichen und scharfsinnigen Analyse gegeben hatte.

Zweites Kapitel.

Jacob Bernoulli.

Die Analyse des Jacob trägt den Titel: „Analysis magni problematis isoperimetrici.“ Sie unterscheidet sich von der des Bruders vor Allem darin, daß sie die Betrachtung zweier Kurvenelemente vermeidet und drei benachbarte Elemente nimmt und nun die beiden Ordinaten variiert, welche den respektiven Ecken entsprechen. Die Lösung beruht auf folgenden Betrachtungen.

Sei (Fig. 1) die X-Axe horizontal, die Y-Axe vertikal und seien BF, FG, GC drei unendlich benachbarte Kurvenelemente, die der isoperimetrischen Bedingung

$$A) \quad BF + FG + GC = \text{const.}$$

unterworfen sind. Soll nun die gesuchte Kurve ABC irgend eine M_a^i -eigenschaft besitzen, so müssen wir sie im Vergleich zu den benachbarten Kurven betrachten: wir werden also die Punkte F und G verrücken und den Einfluß der Bedingung A) auf diese Verrückung untersuchen. Infolge der zweifachen Forderung, daß die Ordinaten KR Funktionen der Ordinaten KF oder der Bögen AF seien, muß eine doppelte Bewegung der Punkte F und G vorgenommen werden, wenn die Bedingung A) bestehen soll. Entweder nämlich geschieht die Verrückung von F und G auf den Ordinaten selbst, oder durch Drehung von BF um B und von GC um C.

Erstens: Fragen wir nach dem Einfluß der isoperimetrischen Bedingung A) im ersten Falle, wo wir F und G auf den Ordinaten bewegen, und wo die Ordinaten KR Funktionen von FK sind.

Nehmen wir

$$AH = x, HB = y, AB = s,$$

so ist

$$\begin{cases} BX = l = dx, \\ FY = m = dx + d^2x, \\ GZ = n = dx + 2 \cdot d^2x + d^3x, \\ FX = p = dy, \\ GY = q = dy + d^2y, \\ CZ = r = dy + 2 \cdot d^2y + d^3y, \\ BF = v = ds, \\ FG = t = ds + d^2s, \\ GC = u = ds + 2 \cdot d^2s + d^3s. \end{cases}$$

Wir erhalten aus Fig. 1 sofort die 3 Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} v^2 = l^2 + p^2, \\ t^2 = m^2 + q^2, \\ u^2 = n^2 + r^2, \end{cases}$$

zu denen sich gemäß der Voraussetzung die drei weiteren gesellen

$$2) \quad \begin{cases} l + m + n = \text{const.} \\ p + q + r = \text{const.} \\ v + t + u = \text{const.} \end{cases}$$

Wenn wir diese 6 Gleichungen differenzieren, so ergeben sich für die unbestimmten Verrückungen von F und G 6 neue Gleichungen, die sich aber wegen der Annahme, daß F und G sich nur auf den Ordinaten bewegen, daß also die Abscissenveränderungen dabei = 0 sind,

$$dl = dm = dn = 0,$$

auf folgende 5 reducieren

$$3) \quad \begin{cases} p \cdot dp = v \cdot dv, \\ q \cdot dq = t \cdot dt, \\ r \cdot dr = u \cdot du. \\ dp + dq + dr = 0, \\ dv + dt + du = 0. \end{cases}$$

Hieraus lassen sich 4 Unbekannte, etwa du, dt, dv, dr eliminieren, es kommt

$$4) \quad dp : dq = (r \cdot s \cdot t - u \cdot v \cdot q) : (p \cdot u \cdot t - v \cdot r \cdot t)$$

Die Verrückung von F, die wir df nennen wollen, ist dp, die von G, oder dg, ist dq: so daß wir als Verhältniß dieser Verrückungen erhalten:

$$df : -dg = (r \cdot v \cdot t - u \cdot v \cdot q) : (u \cdot v \cdot q - p \cdot u \cdot t)$$

oder, wenn wir für r, v, t, p, q, u die Differentialwerte einsetzen, so ergibt sich nach einigen Umformungen*)

$$5) \quad df: -dg = (ds^2 \cdot d^2y + ds^2 \cdot d^3y - d^2y^2 \cdot dy): \\ \cdot (ds^2 \cdot d^2y + 2d^2y^2 \cdot dy).$$

Um dann zur Gleichung der gesuchten Kurve zu gelangen, haben wir den Verrückungen df und dg noch die Bedingung aufzulegen, daß die Fläche XAV (Fig. 1) ein M_a^i werde. Das Flächenstück $PHIQ$, welches dem betrachteten Kurventeil entspricht, ist

$$HP.HK + RK.KL + SL.LI,$$

und dieses muß ein M_a^i werden nach dem Prinzip**): „Wenn einer Kurve in ihrer vollen Ausdehnung eine M_a^i -eigenschaft zugehört, so findet sie auch für jeden noch so kleinen Teil derselben statt.“

Nennen wir daher

$$HP = B, RK = F, SL = G,$$

so muß

$$6) \quad B.l + F.m + G.n = M_a^i$$

werden. Da nun Punkt B sowohl, wie auch l, m, n bei der Aenderung des Kurvenstückes dieselben bleiben, so ist zufolge der Natur des M_a^i

$$m.dF + n.dG = 0.$$

Setzt man

$$KF = f, LG = g,$$

so ist, weil F eine Funktion von f , G von g ist,

$$dF = h.df, \quad dG = i.dg,$$

wo h und i resp. Funktionen von f und g sind, und wo, weil f und g zwei sich unendlich wenig unterscheidende Größen sind, die Relation***) besteht

$$i = h + dh.$$

Daher resultiert die Bedingungsgleichung

$$m.h.df + n.(h + dh).dg = 0.$$

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir die unverändert bleibenden Abscissentheilen gleichsetzen

$$l = m = n = dx.$$

Dann kommt aber

$$7) \quad df: -dg = (h + dh):h.$$

So haben wir in 5) und 7) zwei Relationen für die Verrückungen der Punkte F und G . Kombinieren wir dieselben, so erhalten wir die Gleichung der gesuchten Kurve, nämlich

*) Theorem IV.

**) Jacob Bernoulli, opera II, pag. 769.

***) Theorem VI.

$$8) \quad h \cdot ds^2 \cdot d^3y - 3h \cdot dy \cdot d^2y^2 - dh \cdot ds^2 \cdot d^2y = 0.$$

Diese Differentialgleichung ergiebt integriert

$$9) \quad \frac{a^2 \cdot t \cdot dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)^3}} = h \cdot dy,$$

worin gesetzt wurde

$$t = a \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Nennen wir $f(y)$ die Funktion, welche die Ordinaten der Kurve AV durch die Ordinaten y der zu suchenden ausdrückt, so ist

$$h \cdot dy = df(y).$$

Setzen wir dies ein und integrieren, so kommt

$$10) \quad c - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} = f(y).$$

Hier wird c einmal $= 0$, dann $= a$ gesetzt, sodafs

$$11) \quad f(y) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}, \quad f(y) = a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}},$$

hervorgeht, woraus man dann schliesst, wenn zur Abkürzung $f = f(y)$ geschrieben wird

$$t = \frac{a \cdot \sqrt{a^2 - f^2}}{f}, \quad t = \frac{a \cdot \sqrt{2af - f^2}}{a - f}.$$

Setzen wir endlich für t seinen Wert ein, so erhalten wir schliesslich als Differentialgleichung für die Kurve, welche die Fläche XAV zu einem M_a^i macht,

$$12) \quad dx = \frac{f \cdot dy}{\sqrt{a^2 - f^2}},$$

$$13) \quad dx = \frac{(a - f) \cdot dy}{\sqrt{2af - f^2}}.$$

Jacob erhält nicht die Gleichung 10), sondern er integriert 9) sofort in die Formeln 11). Das vollständige Integral von 9) ist aber 10), und es wird dann

$$dx = \frac{(c - f) \cdot dy}{\sqrt{a^2 - (c - f)^2}}.$$

Aus dieser falschen Integration erklären sich nun auch die Trugschlüsse, welche Jacob zog.

Indem er nämlich auf rein geometrischem Wege untersucht, wann für die beiden gefundenen Kurven ein Ma , wann ein Mi der Fläche XAV eintritt, findet er, dafs die Gleichung 12) ein Ma von $\int f(y) \cdot dx$ erzeugt, während dasselbe Integral ein Mi wird für die Gleichung 13).

Auf dieselbe Art leitet Jacob die Kurvengleichungen ab,

für welche unter Annahme der isoperimetrischen Bedingung A) $\int \frac{1}{f(y)} \cdot dx = M_a^i$, $\int f(y) \cdot ds = M_a^i$, $\int \frac{1}{f(y)} \cdot ds = M_a^i$ wird. Der erste Fall von diesen dreien geht aus dem soeben behandelten hervor, wenn man f mit $\frac{a^2}{f}$ vertauscht; während der zweite dadurch gelöst wird, dafs man die durch die isoperimetrische Bedingung hervorgegangene Relation 5) mit derjenigen kombiniert, die sich aus der Bedingung (Fig. 1)

$$HP \cdot BF + RK \cdot FG + SL \cdot GC = M_a^i$$

ergiebt. Die Ableitung und Umsetzung in eine Differentialgleichung ist dieselbe wie im betrachteten Falle. Endlich die Aufgabe $\int \frac{1}{f(y)} \cdot ds = M_a^i$ wird alsdann gelöst, indem man wieder $\frac{a^2}{f}$ statt f setzt.

So kommt Jacob zu folgendem Resultat,

- 1) $\int f(y) \cdot dx = Ma$ liefert $dx = \frac{f(y) \cdot dy}{\sqrt{a^2 - f^2}}$,
- 2) $\int f \cdot dx = Mi$ „ $dx = \frac{(a - f) \cdot dy}{\sqrt{2af - f^2}}$,
- 3) $\int \frac{1}{f} \cdot dx = Ma$ „ $dx = \frac{a \cdot dy}{\sqrt{f^2 - a^2}}$,
- 4) $\int \frac{1}{f} \cdot dx = Mi$ „ $dx = \frac{(f - a) \cdot dy}{\sqrt{2af - a^2}}$,
- 5) $\int f(y) \cdot ds = Ma$ „ $dx = \frac{a \cdot dy}{\sqrt{(b - f)^2 - a^2}}$,
- 6) $\int f \cdot ds = Mi$ „ $dx = \frac{a \cdot dy}{\sqrt{f^2 - a^2}}$,
- 7) $\int \frac{1}{f} \cdot ds = Ma$ „ $dx = \frac{a \cdot f \cdot dy}{\sqrt{(a^2 - b \cdot f)^2 - a^2 \cdot f^2}}$,
- 8) $\int \frac{1}{f} \cdot ds = Mi$ „ $dx = \frac{f \cdot dy}{\sqrt{a^2 - f^2}}$.

Die merkwürdige Übereinstimmung der Kurvengleichungen in den Fällen 1) und 8) hat auch Jacob zu einer weiteren Untersuchung veranlaßt. Er sagt darüber*): „Obgleich die Gleichung dieselbe ist, welche $\int f \cdot dx = Ma$, und $\int \frac{1}{f} \cdot ds = Mi$

*) Opera, pars II, pag. 882.

macht, so gehört sie doch nur im ersten Falle den isoperimetrischen Figuren an, während sie im andern Falle auf alle Kurven überhaupt Anwendung findet. Anders verhält es sich mit dem Mi von $\int f \cdot dx$ und dem Ma von $\int \frac{1}{f} \cdot ds$. Beide Male erhalten wir andre Kurven, die sich nicht nur durch eine andre Lage unterscheiden“. Giebt er somit hier die Allgemeinheit der Gleichung im Falle 8) zu, so hätte er doch genauer prüfen sollen, wie sich die Kurven verhalten, welche unter allen isoperimetrischen Kurven $\int \frac{1}{f} \cdot ds = \text{Mi}$ machen; und da hätte er erkennen müssen, dafs auch die Gleichung unter 7) $\int \frac{1}{f} \cdot ds = \text{Mi}$ machen kann.

Jacob macht nämlich die Bemerkung, dafs die erhaltenen Lösungen 1) bis 8) verallgemeinert werden könnten, indem die Funktion f vermehrt oder vermindert werden dürfte um irgend eine Konstante c . Man könnte z. B. für die erste Formel schreiben

$$dx = \frac{(f + c) \cdot dy}{\sqrt{a^2 - (f + c)^2}},$$

wodurch immer noch Kurven bezeichnet würden, die $\int f \cdot dx = \text{Ma}$ machten und ausserdem die bestimmte, nach der Konstanten c sich richtende Länge besäfsen. Da aber c willkürlich ist, so können wir ihr einmal den Wert $-a$ geben und erhalten die Kurve

$$dx = \frac{(f - a) \cdot dy}{\sqrt{2a} \sqrt{f - f^2}},$$

welche nach der eben gemachten Bemerkung $\int f \cdot dx = \text{Ma}$ machen sollte, die aber in Wirklichkeit, wie Jacob gefunden hat, ein Mi hervorbringt.

Der Fehler, welcher zu diesem offenen Widerspruch führt, liegt darin, dafs an Stelle der von Jacob erhaltenen Integrale 11) das eine, allein richtige zu setzen ist

$$f(y) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} - c,$$

aus dem folgt

$$14) \quad dx = \frac{(f - c) \cdot dy}{\sqrt{a^2 - (f - c)^2}}.$$

Diese Gleichung aber umfaßt nicht nur die beiden Gleichungen 11), sondern ergiebt noch eine unendliche Menge an-

derer Kurven, und sie wird je nach dem Verhältniß der Konstanten a und c zu einander $\int f(y) \cdot dx$ bald zum M_a , bald zum M_i machen.

Die Gleichung 12) macht aber, wie die Tabelle No. 8) zeigt, auch $\int \frac{1}{f} \cdot ds = M_i$; an ihre Stelle wäre somit die allgemeine Gleichung 17) zu setzen. Jedoch diese leistet gar nicht der gestellten M_i -bedingung Genüge. Denn die Kurve, welche $\int \frac{1}{f(y)} \cdot ds = M_a^i$ macht, lautet nach der richtigen Ableitung Johann Bernoullis *):

$$15) \quad dx = \frac{a \cdot f \cdot dy}{\sqrt{(a^2 - b \cdot f)^2 - a^2 \cdot f^2}},$$

fällt also mit No. 7) der Tabelle zusammen. In der That giebt es Fälle, in welchen die Gleichung 15), welche Jacob als richtig für das M_a aufstellte, ein M_i hervorbringt. Nimmt man $b = 0$, so kommt die Differentialformel

$$dx = \frac{f \cdot dy}{\sqrt{a^2 - f^2}},$$

von der Jacob selbst sagt, daß sie ein M_i erzeuge.

Die obige Tabelle wäre somit in die folgende umzuändern:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int f(y) \cdot dx &= M_a^i \text{ liefert } dx = \frac{(f - c) \cdot dy}{\sqrt{a^2 - (f - c)^2}}, \\ 2) \quad \int \frac{1}{f} \cdot dx &= M_a^i \quad „ \quad dx = \frac{(a + f \cdot c) \cdot dy}{\sqrt{f^2 - (a + f \cdot c)^2}}, \\ 3) \quad \int f(y) \cdot ds &= M_a^i \quad „ \quad dx = \frac{a \cdot dy}{\sqrt{(b - f)^2 - a^2}}, \\ 4) \quad \int \frac{1}{f(y)} \cdot ds &= M_a^i \quad „ \quad dx = \frac{a \cdot f \cdot dy}{\sqrt{(b \cdot f - a^2)^2 - a^2 f^2}}. \end{aligned}$$

Zweitens: Gehen wir zur Betrachtung des zweiten Falles, wo die Ordinaten KR Funktionen der Bogenstücke AF sind, und wo dann wieder unter der Annahme der isoperimetrischen Bedingung der Ausdruck $\int f(s) \cdot dx = M_a^i$ werden soll.

Die Ableitung der Gleichungen, welche die Lösung dieser Aufgabe enthalten, geschieht in derselben Weise wie im ersten Falle; nur geht hier die Verrückung der Punkte F und G nicht auf den Ordinaten KF und LG vor sich, sondern durch Drehung von BF um F und von GC um C . Es

*) Darüber siehe das zweite Kapitel.

bestehen dann dieselben 6 Differentialgleichungen wie oben, doch reduzieren sie sich diesmal, weil die Bogenveränderungen $= 0$ sind,

auf folgende 5

$$a) \quad \begin{cases} l \cdot dl + p \cdot dp = 0, \\ m \cdot dm + q \cdot dq = 0, \\ n \cdot dn + r \cdot dr = 0, \\ dl + dm + dn = 0, \\ dp + dq + dr = 0, \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von dl, dm, dn, dr folgt

$$df: -dg = (l \cdot m \cdot r - l \cdot n \cdot q) : (l \cdot n \cdot q - m \cdot n \cdot p).$$

Setzen wir hier die Differentialwerte ein, so resultiert als Verhältniss der Verrückung unter dem Einfluss der isoperimetrischen Bedingung A)

$$b) \quad df: -dg = (d^2y \cdot dx^2 + d^3y \cdot dx^2 + dy \cdot d^2y^2) : (d^2y \cdot dx^2 - 2dy \cdot d^2y^2).$$

Die gesuchte Kurve soll ferner die Fläche XAV zu einem M_x^i machen. Bezeichnen wir (Fig. 1)

$$HP = f(s), \quad KR = \phi(s), \quad SL = \psi(s)$$

und nehmen an

$$c) \quad HK = KL = LI = dx, \\ \text{so schreibt sich das Flächenstück PHIQ in der Form} \\ (f + \phi + \psi) \cdot dx = M_x^i.$$

Da der Punkt B unverändert bleibt, folgt hieraus

$$dx \cdot (d\phi + d\psi) = 0.$$

Sei nun

$$AB = s, \\ AF = s + v = \varphi, \\ AG = s + v + t = \psi,$$

so ist

$$d\phi = h \cdot d\varphi, \quad d\psi = i \cdot d\psi,$$

und die Bedingung des M_x^i schreibt sich nach der Bedeutung von φ und ψ

$$h \cdot dv + i \cdot dv + i \cdot dt = 0.$$

Wegen der Voraussetzung c) aber gelten die Formeln 3), pag. 12, und so kommt

$$h \cdot p \cdot t \cdot dp + i \cdot p \cdot t \cdot dp + i \cdot q \cdot v \cdot dq = 0,$$

woraus folgt

$$df: -dg = i \cdot q \cdot v : (h \cdot p \cdot t + i \cdot p \cdot t - i \cdot q \cdot v).$$

Setzen wir endlich für p, q, v, t die Differentialwerte ein und für $i = h + dh$, so erhalten wir

$$d) \quad df: -dg = (h \cdot dy \cdot ds + h \cdot ds \cdot d^2y + dh \cdot dy \cdot ds) : (h \cdot dy \cdot ds + 2h \cdot dy \cdot d^2s - h \cdot ds \cdot d^2y).$$

Kombinieren wir also b) und d), so fallen die unbestimmten Verrückungen heraus, und es bleibt die Gleichung*) der gesuchten Kurve in Form der folgenden komplizierten Differentialgleichung übrig

$$e) \quad h \cdot ds^2 \cdot dy \cdot d^3y = h \cdot dy^2 \cdot d^2y^2 + 2h \cdot ds^2 \cdot d^2y^2 + dh \cdot dy \cdot d^2s \cdot d^2y.$$

Dieselbe wird integriert und ergibt

$$f) \quad \frac{a^2 \cdot t \cdot dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)^3}} = h \cdot ds,$$

worin gesetzt wurde

$$t = a \cdot \frac{ds}{dx}.$$

Nun ist nach unserer Annahme

$$h \cdot ds = df(s),$$

daher folgt durch Integration von f)

$$\frac{a^2}{\sqrt{t^2 - a^2}} - c = f(s).$$

Jacob Bernoulli findet als Integrale von f) die beiden folgenden

$$g) \quad f(s) = \frac{a^2}{\sqrt{t^2 - a^2}}, \quad f(s) = a - \frac{a^2}{\sqrt{t^2 - a^2}};$$

indem er dieselben nach t auflöst und für t seinen Wert substituiert, erhält er schliesslich als Gleichungen der gesuchten Kurven

$$h) \quad dx = \frac{f(s) \cdot ds}{\sqrt{a^2 + f^2(s)}},$$

$$i) \quad dx = \frac{(a - f(s)) \cdot ds}{\sqrt{b^2 - 2af(s) + f^2(s)}}, \quad b^2 = 2a^2.$$

Welche von beiden Kurven $\int f(s) \cdot dx$ als grösste oder kleinste Fläche besitzt, wird auf dieselbe Weise wie oben entschieden. Zuerst wird erwogen, ob mit wachsendem s auch f(s) wächst oder abnimmt, woraus sich die Frage beantworten lässt, ob die Kurve gegen die X-Axe konvex oder konkav gerichtet ist; alsdann lässt man dieselbe um die Axe rotieren und sieht nach, ob für die so entstehende isoperimetrische Kurve $\int f(s) \cdot dx$ grösser oder kleiner ausfällt. Im ersten Falle haben wir auf der ursprünglichen Kurve ein Mi, im zweiten ein Ma.

So fand Jacob Bernoulli, dass die Kurve h) ein Ma, die Kurve i) ein Mi von $\int f(s) \cdot dx$ liefert. Durch Vertauschung

*) Problem II.

von f mit $\frac{a^2}{f}$ würde man dann die Kurven erhalten, welche $\int \frac{1}{f} \cdot dx = M_a$ machen, und zu der Tabelle pag. 15 wäre hinzuzufügen:

$$\begin{aligned} 9) \quad \int f(s) \cdot dx &= M_a \quad \text{liefert} \quad dx = \frac{f \cdot ds}{\sqrt{a^2 + f^2}}, \\ 10) \quad \int f(s) \cdot dx &= M_i \quad \text{,} \quad dx = \frac{(f - a) \cdot ds}{\sqrt{b^2 - 2a \cdot f + f^2}}, \\ 11) \quad \int \frac{1}{f(s)} \cdot dx &= M_a \quad \text{,} \quad dx = \frac{a \cdot ds}{\sqrt{a^2 + f^2}}, \\ 12) \quad \int \frac{1}{f(s)} \cdot dx &= M_i \quad \text{,} \quad dx = \frac{(b^2 - a \cdot f) \cdot ds}{b \cdot \sqrt{b^2 - 2af + f^2}}. \end{aligned}$$

Indessen hier stellt sich derselbe Fehler ein, wie oben: Die Formeln sind nicht allgemein genug. Wie wir schon bei der Integration der Differentialgleichung f) erkannten, lautet das Integral

$$\frac{a^2}{\sqrt{t^2 - a^2}} - c = f(s),$$

und giebt für die gesuchte Kurve

$$k) \quad dx = \frac{(c + f) \cdot ds}{\sqrt{a^2 + (c + f)^2}},$$

welche in die beiden Gleichungen 9) und 10) der Tabelle für $c = 0$ und $c = -a$ übergeht. Ebenso ist an Stelle von 11) und 12) zu setzen die Formel

$$l) \quad dx = \frac{(b^2 + f \cdot c) \cdot ds}{\sqrt{a^2 \cdot f^2 + (b^2 + f \cdot c)^2}},$$

die aus k) hervorgeht, wenn man f mit $\frac{b^2}{f}$ vertauscht. Für $c = 0$ und $b = a$ erhalten wir dann 11), und für $c = -a$ und $b^2 = a^2 + c^2$ kommt 12), sodaß die Gleichungen Jacobs in der That nur Spezialgleichungen von l) sind.

Drittes Kapitel.

Johann Bernoulli.

Nachdem Johann Bernoulli schon die Mängel in den Resultaten seines Bruders bemerkt und auch eingesehen hatte, daß dem isoperimetrischen Problem mit der Annahme zweier Kurvenelemente nicht beizukommen wäre, stützte er sich

auf die Voraussetzung des Bruders, 3 benachbarte Kurvenelemente zu betrachten und suchte eine neue Analyse zur Lösung des Problems. Das Ergebnis seiner Untersuchungen erschien in den *Mémoires de l'Académie des Sciences* 1718, unter dem Titel: „Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres; avec une nouvelle méthode courte et facile de les résoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problèmes, qui ont rapport à ceux-là.“

In kürzerer und einfacherer Weise als sein Bruder löst hier Johann dieses Variationsproblem, indem er ein Prinzip in Anwendung bringt, das in eleganter Weise sofort zur Differentialgleichung des Problems führt. Es ist die Methode, gleichförmige Ausdrücke zu bilden, die einander gleichgesetzt werden: la méthode de l'uniformité. Johann nimmt nämlich drei benachbarte Kurvenelemente und findet eine Relation zwischen dem ersten und zweiten Element, und eine gleichgebaute zwischen dem zweiten und dritten. Daraus, daß beide Relationen einander gleich sind, wird geschlossen, daß jede für sich konstant sein muß; und das führt auf die gesuchte Gleichung.

In der That, indem er sich das Problem in derselben Form wie sein Bruder stellt: „Unter allen Kurven von derselben gegebenen Länge diejenigen zu finden, für welche $\int f \cdot dx = M$ wird, wo f Funktion der Ordinate y oder des Bogens s ist“: betrachtet er auch eine doppelte Verschiebung zweier Punkte.

Sei $f = f(y)$, und seien BC, CD, DE drei benachbarte Elemente der gesuchten Kurve, so können wir die Ordinaten-elemente QR, RS, ST festhalten und C nach F, D nach G verschieben, sodaß immer bleibt Fig. 2.

$$1) \quad BC + CD + DE = BF + FG + GE.$$

Es werden um B der Kreisbogen Ff, um K die Bögen Cc und Dd und um E der Bogen Gg geschlagen, dann ist sicherlich

$$Bf + CK + KD + gE = BF + cK + Kd + GE.$$

Dies von 1) abgezogen liefert

$$fC + Dg = Fc + Gd,$$

oder

$$Fc - fC = Dg - Gd.$$

Berechnen wir diese Größen aus den kleinen rechtwinkligen Dreiecken, so bekommen wir

$$FC \cdot (\sin BCN - \sin CDO) = DG \cdot (\sin CDO - \sin DEP).$$

Hier haben wir auf beiden Seiten die gewünschten gleichförm-

migen Ausdrücke, in denen wir von einem Element zum andern fortschreiten können. Sie sind sämtlich einander gleich, folglich ist

$$FC \cdot (\sin BCN - \sin CDO) = \text{const.}$$

Nun ist, wenn wir den Bogen $AB = s$ nennen,

$$BF = ds, \quad FC = d^2x,$$

$$\sin BCN - \sin CDO = d \frac{dx}{ds}.$$

Die Bedingung 1) der Isoperimetrie bringt daher in dem Falle, wo f Funktion von y ist, mit sich, dy konstant vorausgesetzt,

$$2) \quad d^2x \cdot d \frac{dx}{ds} = \text{const.}$$

und ebenso bei konstantem dx

$$3) \quad d^2y \cdot d \frac{dy}{ds} = \text{const.}$$

Fig. 3. Fragen wir uns nach dem Einfluß der Bedingung 1), wenn f Funktion von s ist. Wir schlagen wieder um B mit BC , um E mit ED Kreisbögen, sodaß bleibt

$$FG = CD.$$

Außerdem beschreiben wir um K die Bögen Cc und Gg . Dann ist auch

$$Fc = gD.$$

Wir verlängern Cc und iF bis d und schneiden Gg durch die Ordinate DL in e , dann ist

$$\triangle cdF \cong \triangle geD$$

also

$$Fd = eD$$

oder

$$ad - aF = bD - be.$$

Bestimmen wir wieder diese vier Stücke aus den kleinen rechtwinkligen Dreiecken Cad , CaF , bGD und bGe , so kommt

$$Ca \cdot (\text{tg } BCN - \text{tg } CDO) = Gb \cdot (\text{tg } CDO - \text{tg } DEP)$$

oder nach dem Prinzip der Uniformität

$$Ca \cdot (\text{tg } BCN - \text{tg } CDO) = \text{const.}$$

oder da

$$Ca = d^2x$$

ist,

$$4) \quad d^2x \cdot d \frac{dx}{dy} = \text{const.}$$

und analog

$$5) \quad d^2y \cdot d \frac{dy}{dx} = \text{const.}$$

Nun brauchen wir noch die Bedingung, daß $\int f(y) \cdot dx$ oder $\int f(s) \cdot dx$ ein M_a^i werde, in die entsprechende Form zu bringen, um dann durch Kombination der so erhaltenen Relationen mit den obigen isoperimetrischen Gleichungen die Gleichung der gesuchten Kurve zu erhalten. Beginnen wir damit, daß Fig. 2.

$$\int f(y) \cdot dx = M_a^i$$

werden soll, so haben wir nach der Natur des M_a^i

$$\begin{aligned} f(BH) \cdot HI + f(CI) \cdot IL + f(DL) \cdot LM &= \\ &= f(BH) \cdot Hi + f(Fi) \cdot il + f(Gl) \cdot lM, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} f(BH) \cdot HI + f(CI) \cdot IL + f(DL) \cdot LM &= \\ &= f(BH) \cdot [HI - il] + f(CI) \cdot il + f(DL) \cdot lM, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$[f(BH) - f(CI)] \cdot il = [f(CI) - f(DL)] \cdot lL.$$

Damit haben wir wieder die Gleichförmigkeit erreicht: es ist

$$[f(BH) - f(CI)] \cdot il = \text{const.},$$

oder in Zeichen

$$6) \quad df \cdot d^2x = \text{const.}$$

Kombinieren wir 6) mit 2), so kommt durch Division beider

$$df = a \cdot d \frac{dx}{ds},$$

eine Gleichung, welche integriert ergibt

$$a \cdot dx = (f - c) \cdot ds,$$

und weil

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$dx = \frac{(f - c) \cdot dy}{\sqrt{a^2 - (f - c)^2}}.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Kurve; sie stimmt überein mit der pag. 16, No. 14 nach der Analyse Jacobs erhaltenen.

Soll $\int f(y) \cdot ds = M_a^i$ werden, so muß die Gleichung bestehen

$$\begin{aligned} f(BH) \cdot BC + f(CI) \cdot CD + f(DL) \cdot DE &= \\ &= f(BH) \cdot BF + f(Fi) \cdot FG + f(Gl) \cdot GE, \end{aligned}$$

die sich ebenso wie vorhin in der uniformen Weise schreiben läßt

$$f(BH) \cdot Cf - f(CI) \cdot Fc = f(CI) \cdot Gd - f(Dl) \cdot Dg,$$

woraus folgt

$$f(BH) \cdot Cf - f(CI) \cdot Fc = \text{const.}$$

Bestimmen wir Cf und Fc aus den entstehenden kleinen rechtwinkligen Dreiecken, so ist

$$Cf = CF \cdot \left(\frac{dx}{ds} \right)_c$$

$$Fc = CF \cdot \left(\frac{dx}{ds} \right)_d$$

Setzen wir dies ein, so wird

$$CF \cdot \left[f(BH) \cdot \left(\frac{dx}{ds} \right)_c - f(CI) \cdot \left(\frac{dx}{ds} \right)_d \right] = \text{const.}$$

Das ist aber nichts anderes als

$$7) \quad d^2x \cdot d \left(f \cdot \frac{dx}{ds} \right) = \text{const.}$$

Kombinieren wir hiermit die isoperimetrische Bedingung 2), so ergibt sich aus beiden

$$d \left(f \cdot \frac{dx}{ds} \right) = b \cdot d \frac{dx}{ds},$$

$$f \cdot \frac{dx}{ds} = b \cdot \frac{dx}{ds} + a,$$

und wegen

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$8) \quad dx = \frac{a \cdot dy}{\sqrt{(f-b)^2 - a^2}}.$$

Fig. 3. — Wird endlich unter allen isoperimetrischen Kurven diejenige gesucht, welche

$$\int f(s) \cdot dx = M_a^i$$

macht, so ergibt die Natur des M_a^i

$$\begin{aligned} f(AB) \cdot BN + f(ABC) \cdot CO + f(ABCD) \cdot DP &= \\ &= f(AB) \cdot Bn + f(ABF) \cdot Fo + f(ABFG) \cdot GP, \end{aligned}$$

oder da

$$BC = BF, \quad CD = FG, \quad DE = GE$$

hier festgesetzt wurde,

$$f(AB) \cdot (BN - Bn) + f(ABC) \cdot (CO - Fo) + f(ABCD) \cdot (DP - Gp) = 0,$$

$$f(AB) \cdot Ca - f(ABC) \cdot (Ca + Gb) + f(ABCD) \cdot Gb = 0,$$

$$[f(AB) - f(ABC)] \cdot Ca = [f(ABC) - f(ABCD)] \cdot Gb,$$

womit die Uniformität erreicht ist. Wir setzen daher

$$Ca \cdot [f(AB) - f(ABC)] = \text{const.},$$

das ist

$$9) \quad d^2x \cdot df = \text{const.}$$

Die isoperimetrische Bedingung 4) wird mit 9) zusammen-
genommen, und wir erhalten die Kurvengleichung

$$df = a \cdot d \frac{dx}{dy},$$

daher nochmals integriert

$$10) \quad a \cdot dx = (f + c) \cdot dy.$$

Um nachzuweisen, daß dies dieselbe Gleichung wie die pag. 20 unter k) erhaltene ist, quadrieren wir sie und setzen

$$dy^2 = ds^2 - dx^2,$$

dann kommt, nach dx aufgelöst

$$dx = \frac{(f + c) \cdot ds}{\sqrt{a^2 + (f + c)^2}}.$$

Viertes Kapitel.

Brook Taylor.

Das Prinzip, welches Jacob Bernoulli zur Lösung der isoperimetrischen Aufgaben gegeben hatte, behauptete mehrere Jahre hindurch seine Herrschaft. Daher ward nach demselben das isoperimetrische Problem von Neuem, aber allgemeiner gelöst durch Taylor in seinem 1717 erschienenen „Methodus incrementorum directa et inversa“.

Die Taylor'sche Lösung ist eine der einfachsten und klarsten, die aus jener Zeit stammen. Es wird auch von der Betrachtung dreier benachbarter Kurvenelemente ausgegangen und zunächst der Satz abgeleitet, daß eine M_a^i -Eigenschaft, welche einer gewissen Kurve in ihrer Totalität zukommt, auch jedem Teilchen dieser Kurve angehören müsse. Damit haben wir wieder das Bernoulli'sche Prinzip. Den Beweis hierzu giebt Taylor in folgenden Worten:*) „Wenn dem Teilchen einer zweiten Kurve die gegebene M_a^i -Eigenschaft zukäme, so würde, da die Summe aller Teilchen die Kurve ergiebt, der zweiten Kurve die gegebene Eigenschaft zugehören und nicht der ersten, und das widerspricht der Voraussetzung.“

Daß diese Annahme allgemein nicht richtig ist, hat, wie wir später sehen werden, Euler nachgewiesen. Indessen Taylor rechtfertigt damit die ganze Grundlage seiner Lösung. Er studiert die Änderung der Kurve in drei benachbarten Teilchen und leitet daraus die Differentialgleichung der gesuchten Kurve ab. Die Fassung des Problems ist ähnlich der von Bernoulli. Er sucht die Gestalt einer Kurve ABC, wenn die Fläche OabD, die von einer gewissen zweiten Kurve abc und der X-Axe gebildet wird, ein Ma ist. Dabei

Fig. 4.

*) Lemma III., pag. 67.

hängt die zweite Kurve so von der ersten ab, daß ihre Ordinaten bD Funktionen sind der Ordinaten BD , der Abscissen OD und der Bögen AB der ersten Kurve. Vorausgesetzt werde die Länge der Kurve ABC als gegeben.

Wir bezeichnen

$OD = x, \quad BD = y, \quad AB = s,$
nehmen die Änderung $dx = \text{const.}$ an und setzen
 $bD = f(x, y, s).$

Fig. 5. Es seien BM, MN, NR drei benachbarte Kurventeilchen, und es beziehe sich f auf die Ordinate bD , f_1 auf die zunächst benachbarte mF und f_2 auf die dieser benachbarte nG : dann wird die Fläche $DbrH$ dargestellt durch

$$1) \quad f \cdot dx + f_1 \cdot dx + f_2 \cdot dx.$$

Dieses Flächenstück muss ein Ma erreichen, wenn es die ganze Fläche $OabD$ soll; ihre erste Variation, oder nach Taylor ihre erste Fluxion muss verschwinden.

Nun werden die Punkte b und r bei Änderung des Elementes in das nächstfolgende dieselben bleiben, nur m und n nehmen andere Lagen an: daher sind in 1) nur f_1 und f_2 variabel, und wir erhalten die Bedingung

$$df_1 \cdot dx + df_2 \cdot dx = 0,$$

oder

$$2) \quad df_1 + df_2 = 0.$$

Das ist die allgemeinste Form der gesuchten Kurven-gleichung. Es war aber f Funktion von x, y, s ; dasselbe gilt natürlich von f_1 und f_2 . Und es ist daher

$$df = L \cdot ds + M \cdot dy + N \cdot dx.$$

Um df_1 zu erhalten, haben wir der Änderungen zu gedenken, die sich an die Verwandlung von f in f_1 anknüpfen. Es ist, wenn wir bezeichnen

$$UM = u, \quad VN = v, \quad WR = w,$$

$$BM = s_1, \quad MN = s_2, \quad NR = s_3$$

nach Voraussetzung

$$A) \quad \begin{cases} HR = BD + (u + v + w) = \text{gegeben,} \\ BR = s_1 + s_2 + s_3 = \text{gegeben.} \end{cases}$$

Die Variationswerte von A) müssen verschwinden, oder

$$B) \quad \begin{cases} du + dv + dw = 0, \\ ds_1 + ds_2 + ds_3 = 0, \end{cases}$$

von denen die erstere Gleichung giebt

$$C) \quad dv = -du - dw.$$

Nun ist aber

$$s_1^2 = u^2 + BU^2,$$

$$s_2^2 = v^2 + MV^2,$$

$$s_3^2 = w^2 + NW^2;$$

hieraus folgt

$$ds_1 = \frac{u \cdot du}{s_1},$$

$$ds_2 = \frac{v \cdot dv}{s_2},$$

$$ds_3 = \frac{w \cdot dw}{s_3},$$

Somit geht die zweite Gleichung B) mit Rücksicht auf C) über in

$$D) \quad \left(\frac{u}{s_1} - \frac{v}{s_2} \right) \cdot du = \left(\frac{v}{s_2} - \frac{w}{s_3} \right) \cdot dw.$$

Es sind du, dv, dw die Änderungen der Ordinaten bei der Bewegung der Punkte M und N, ds_1, ds_2, ds_3 die der drei Kurvenelemente. Daher ist

$$df_1 = L_1 \cdot ds_1 + M_1 \cdot du,$$

$$df_2 = L_2 \cdot (ds_1 + ds_2) + M_2 \cdot (du + dv),$$

$$df_2 = -(L_2 \cdot ds_3 + M_2 \cdot dw).$$

Eine Änderung der Abscissen ist ausgeschlossen; darum fehlen die Glieder mit N. Setzen wir für ds_1 und ds_3 die oben berechneten Werte ein, so kommt

$$3) \quad \begin{cases} df_1 = (L_1 \cdot \frac{u}{s_1} + M_1) \cdot du, \\ df_2 = -(L_2 \cdot \frac{w}{s_3} + M_2) \cdot dw, \end{cases}$$

und die Bedingung 2) lautet

$$4) \quad (L_1 \cdot \frac{u}{s_1} + M_1) \cdot du = (L_2 \cdot \frac{w}{s_3} + M_2) \cdot dw.$$

Setzen wir $\frac{u}{s_1} = q_1$, — was weiter nichts ist als $\frac{dy}{ds}$ für den Punkt M —, so wird

$$\frac{v}{s_2} = q_1 + dq_1, \quad \frac{w}{s_3} = q_1 + 2dq_1 + d^2q_1.$$

Substituieren wir diese Werte in D) und 4), wobei wir gleichzeitig noch für M_2 schreiben $M_1 + dM_1$, und für L_2 $L_1 + dL_1$, so kommt

$$-dq_1 \cdot du = (-dq_1 - d^2q_1) \cdot dw$$

$$(L_1 \cdot q_1 + M_1) \cdot du = [(L_1 + dL_1) \cdot (q_1 + 2dq_1 + d^2q_1) + M_1 + dM_1] \cdot dw.$$

Aus beiden Gleichungen läßt sich das Verhältnis von du und dw eliminieren: wir vernachlässigen unendlich kleine Größen dritter Ordnung, lassen den Index 1 weg und erhalten

$$5) \quad M \cdot d^2q + L \cdot q \cdot d^2q - dM \cdot dq - q \cdot dq \cdot dL - 2L \cdot dq^2 = 0.$$

Fig. 4.

Dies ist die Taylorsche Differentialgleichung für die gesuchte Kurve; sie ist von der zweiten Ordnung, ihr Integral würde also zwei willkürliche Konstanten enthalten. Von denselben bestimmt sich eine daraus, daß die Gleichung für $s = 0$ und $y = OA$ bestehen muß; die andre Konstante wird dadurch erhalten, daß auch $s = ABC$ und $y = FC$ sein muß. In besonderen Fällen ist 5) integrabel. Ein solcher besonderer Fall ist die Aufgabe Bernoullis, der ja nicht allgemein $\int f(x, y, s) \cdot dx = M_a^i$, sondern $\int f(y) \cdot dx = M_a^i$ oder $\int f(s) \cdot dx = M_a^i$ untersucht. Die Taylorsche Differentialgleichung muß sich alsdann auf die von Bernoulli erhaltene reduzieren lassen.

In der That, wenn f nur Funktion von y ist, so ist in 5) $L = 0$, und es wird

$$df = M \cdot dy.$$

Die Gleichung 5) lautet

$$dM \cdot dq - M \cdot d^2q = 0,$$

worin sich die Unbekannten M und dq separieren lassen, so daß sie integriert ergibt

$$6) \quad dq = \frac{M \cdot dx}{a}.$$

Dabei ist a eine bei der Integration auftretende Konstante. Nach der Definition von q aber haben wir mit Berücksichtigung

von $d^2s = \frac{dy \cdot d^2y}{ds}$, die Beziehung

$$dq = \frac{d^2y \cdot dx^2}{ds^3}.$$

Dadurch geht 6) über in

$$\frac{d^2y \cdot dx}{ds^3} = \frac{M \cdot dy}{a \cdot dy} = \frac{df}{a \cdot dy},$$

oder in

$$df = \frac{a \cdot d^2s \cdot dx}{ds^2},$$

eine Gleichung, deren Integration ergibt

$$f - c = a \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Wir quadrieren und nehmen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

und erhalten wirklich die von Bernoulli gefundene Gleichung

$$dx = \frac{(f - c) \cdot dy}{\sqrt{a^2 - (f - c)^2}}.$$

Ist ferner f nur Funktion von s , was dem zweiten Bernoullischen Problem $\int f(s) \cdot dx = M_a^i$ entspricht, so haben wir in 5)

$M = 0$ zu nehmen, und erhalten die Gleichung

$L \cdot (q \cdot d^2q - 2 \cdot dq^2) - q \cdot dq \cdot dL = 0$,
welche sich integrieren läßt und ergibt

$$\frac{L \cdot q^2}{dq} = \frac{a}{dx}.$$

Wir setzen für q und dq die Werte $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{d^2y \cdot dx^2}{ds^3}$, be-
denken, daß

$$df = L \cdot ds$$

ist und bekommen

$$df = \frac{a \cdot dx \cdot d^2y}{dy^2}$$

$$(f + c) \cdot dy = a \cdot dx,$$

dieselbe Gleichung, welche Johann Bernoulli gefunden hatte.

Die Differentialgleichung 5) ist aber nur bei dem isoperimetrischen Problem zu gebrauchen, sie gilt nicht für eine Aufgabe, in welcher eine Kurve gesucht wird, für welche zwischen allen möglichen Kurven $\int f(x, y, s) \cdot dx = M_i$ werde. Dieses bemerkt und nachgewiesen zu haben, ist das Verdienst Eulers, der bei seinen Untersuchungen den Grundmangel der bisherigen Methoden erkannt und erklärt hat.

Fünftes Kapitel.

Colin Maclaurin.

Ehe ich aber zu den bahnbrechenden Arbeiten Eulers übergehe, ist die Lösung eines Engländers anzugeben, die zwar, als einer späteren Zeit angehörig, erst hinter den ersten Schriften Eulers zu besprechen wäre, die aber doch in dieser Periode angeführt werden muß, in welcher geometrische Betrachtungen die Lösung liefern. Im Jahre 1742 veröffentlichte Colin Maclaurin zu Edinburg seinen „Treatise of fluxions“. Erschien dieses Werk zunächst als eine Art von Verteidigungsschrift gegen die Behauptung Berkeleys, die Fluxionenmethode wäre voll von Geheimnissen und falschen Schlüssen, so bietet es eine Fülle von Lösungen interessanter Probleme aus der Geometrie, Mechanik und Astronomie. Der Verfasser lehnt sich, um die Strenge der Beweise zu vermehren, ganz an die Art der alten Geometer in der Behandlungsweise: die eben analytisch erhaltenen Resultate werden ein zweites Mal synthetisch bewiesen. Dadurch wird die ganze Beweisführung sehr weitläufig, und es erfordert viele Mühe, wenn man dem Autor überall folgen will.

Dennoch sind die Lösungen der Probleme fast durchgängig originell und elegant: ein Urteil, welches man auch über die des isoperimetrischen Problems fällen muß. Freilich besitzt diese Lösung keineswegs den historischen Wert, den die Methoden Bernoullis und Taylors und vor allem die späteren Eulers haben; sie eröffnet keine neuen Wege und trägt nur wenig zum Fortschritt in der Wissenschaft bei. Trotzdem kann ich nicht umhin, wenigstens in Kürze die Methode anzugeben. Sie findet sich im 13. Kapitel jenes Werkes.

Jacob Bernoulli hatte in dem Resultat seiner Untersuchungen eine Differentialgleichung dritter Ordnung erhalten; es war das Bestreben Maclaurins, ohne die Kurve in zwei oder mehr Teile zu teilen, eine Lösung mit nur ersten Differentialquotienten zu erhalten. Er führt zu diesem Zwecke das isoperimetrische Problem zurück auf ein Bewegungsproblem, indem er die Eigenschaften einer Kurve ableitet, auf der ein Körper entweder unter dem Einfluß einer in konstanter Richtung wirkenden Kraft, z. B. der Schwerkraft, oder unter dem einer nach einem gegebenen Centrum gerichteten Kraft in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Punkte A aus zu einem tiefergelegenen Punkt D gelangt.

An den Ausgangspunkt seiner Betrachtungen stellt er Fig. 6. das folgende Lemma: „Projiziert man eine Gerade AE auf eine Gerade KE, und denkt man sich AE von einem Körper mit der gleichförmigen Geschwindigkeit u , dagegen KE mit der gleichförmigen Geschwindigkeit a durchlaufen, wo $u < a$ sei, so wird die Differenz der Durchlaufszeiten, das ist

$$\frac{AE}{u} - \frac{KE}{a} = M$$

sein, wenn

$$\sin KAE = \frac{u}{a}$$

wird.“

In der That, nehmen wir auf KE einen Punkt L so an, daß

$$KL:AL = u:a$$

werde, ziehen KH und EV senkrecht auf AL und machen $AR = AE$, dann ist

$$KL:LE = HL:LV,$$

$$KL:KE = HL:HV,$$

$$HV:KE = HL:KL = KL:AL = u:a.$$

Daher folgt

$$\text{und} \quad \frac{KE}{a} = \frac{HV}{u},$$

$$\frac{AE}{u} - \frac{KE}{a} = \frac{AE - HV}{u},$$

$$\text{oder weil} \quad AE - HV = AR - HV = AH + VR$$

ist,

$$\frac{AE}{u} - \frac{KE}{a} = \frac{AH + VR}{u};$$

dieser Ausdruck wird ein Mi, wenn VR verschwindet, da AH unverändert bleibt, oder mit andern Worten, wenn E auf L fällt, also wenn

$$\frac{KE}{AE} = \sin KAE = \frac{u}{a}$$

ist.

Und hierauf fußend, sucht Maclaurin die Kurve, auf welcher ein Körper unter dem Einfluß einer in konstanter Richtung wirkenden Kraft in der kürzesten Zeit fällt.

Sei AED die gesuchte Kurve und E ein Punkt der Kurve mit der Ordinate AK, so kommt ihr augenscheinlich Fig. 7. die Eigenschaft zu, daß die Differenz der Fallzeit auf dem Bogen AE und der Zeit, die vergeht, wenn KE gleichförmig mit der im tiefsten Punkte D erlangten Geschwindigkeit durchlaufen wird, ein Mi sei.

In der That, seien AedD und Aεδ zwei andre Kurven, doch so, daß e und ε auf verschiedenen Seiten von E liegen, daß ferner die Fallzeiten auf ed, ED und εδ gleich sind, und endlich daß

$$eE = dD, E\varepsilon = D\delta$$

sind: so ist, weil AED eine Kurve schnellsten Falles sein soll,

$$T(AED) < T(AedD),$$

wenn wir mit T die respektiven Zeiten bezeichnen. Nun sind aber folgende Zeiten einander gleich

$$T(ED) = T(ed);$$

subtrahieren wir dieselben, dann bleibt

$$T(AE) < T(Ae) + T(dD),$$

oder nach Voraussetzung

$$T(AE) < T(Ae) + T(eE),$$

$$T(AE) < T(Ae) + T(KE) - T(Ke),$$

und daher kommt

$$T(AE) - T(KE) < T(Ae) - T(Ke).$$

Dieselbe Ableitung ist nun für die Kurve Aεδ zu machen,

man erhält auch hier

$$T(AE) - T(KE) < T(A\varepsilon) - T(K\varepsilon),$$

sodafs die gesuchte Kurve wirklich jene angegebene Eigenschaft besitzt. Hierdurch ist aber die Natur der Kurve unmittelbar gegeben. Ist u die augenblickliche Geschwindigkeit im Punkte E , a die im tiefsten Punkte D . dann gilt das vorige Lemma, und es ist der Sinus des Winkels, den die Ordinate im Punkte E mit der gesuchten Kurve bildet, d. i.

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{a}.$$

Je nach der Einwirkung der Kraft sind die Geschwindigkeiten u und a verschieden, und hängen von einer oder mehreren Variabeln ab.

Soll etwa ein allgemeiner Ausdruck

$$\int f(y) \cdot ds = M$$

gemacht werden, so läfst sich die Aufgabe jedesmal auf die Aufsuchung einer Kurve zurückführen, auf welcher die Fallzeit eines Körpers den kleinsten Wert erreicht. Man muß nur die Kraft so einrichten, dafs die Geschwindigkeit in jedem Punkte durch $\frac{1}{f(y)}$ dargestellt werde. Denn sei

$$u = \frac{1}{f(y)},$$

so kommt, wenn t die ganze Fallzeit, s die Bogenlänge bezeichnet,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{f(y)},$$

$$t = \int f(y) \cdot ds,$$

und das ist das obige Integral.

Maclaurin führt nun weiter das isoperimetrische Problem auf die Aufsuchung einer Kurve schnellsten Falles folgendermafsen über:

Sei $T(AED)$ die Zeit, in welcher ein Körper vermöge der auf ihn wirkenden Kraft längs AED fällt, und $t(AED)$ die Zeit, in welcher er längs derselben mit der gleichförmigen Geschwindigkeit a läuft, und sei α eine gegebene Konstante, so wird AED in kürzerer Zeit durchlaufen als eine andre Kurve AeD von gleichem Umfang, wenn

$$\alpha \cdot T(AED) \pm t(AED) = M$$

ist.

Wird nämlich angenommen

$$\alpha \cdot T(AED) \pm t(AED) < \alpha \cdot T(AeD) \pm t(AeD),$$

so ist, weil die beiden Kurven gleich lang sind,

$$t(\text{AED}) = t(\text{AeD}),$$

und also bleibt

$$T(\text{AED}) < T(\text{AeD}),$$

d. h. die Kurve AED wird in kürzerer Zeit durchlaufen als irgend eine andere gleichen Umfanges zwischen A und D.

Sei nun vorausgesetzt

$$1) \quad \alpha \cdot T(\text{AED}) \pm t(\text{AED}) = M_i,$$

und nennen wir u die Geschwindigkeit des fallenden Körpers im Punkte E, und s die Länge von AED, so ist

$$dT(\text{AED}) = \frac{ds}{u},$$

ebenso aber

$$dt(\text{AED}) = \frac{ds}{a}.$$

Darum kommt

$$d[\alpha \cdot T(\text{AED}) \pm t(\text{AED})] = ds \cdot \left[\alpha \cdot \frac{1}{u} \pm \frac{1}{a} \right] = \frac{ds}{V},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{V} = \alpha \cdot \frac{1}{u} \pm \frac{1}{a}$$

setzen. Demnach ist $\alpha \cdot T(\text{AED}) \pm t(\text{AED})$ gleich der Zeit, in welcher AED durchlaufen wird mit einer Geschwindigkeit V im Punkte E. Diese Zeit wird nach Voraussetzung 1) ein M_i sein, und folglich ist AED unter allen Kurven gleicher Länge zwischen A und D in der kürzesten Zeit durchlaufen worden.

Man hat hiernach, um die gesuchte Kurve zu erhalten,

$$\int \frac{ds}{V} = M_i$$

zu machen, und das ist der frühere Fall, wenn nur die Geschwindigkeit durch V ausgedrückt wird.

Und so giebt endlich Maclaurin eine Lösung der beiden Bernoulli'schen Probleme.

1) „Unter allen Kurven gleicher Länge eine Kurve $y = \varphi(x)$ zu bestimmen, daß $\int f(y) \cdot dx = M_a$ werde.“

Dazu schickt er folgendes Lemma voraus: „Seien a und u der Grösse nach gegebene Strecken, wobei $u < a$ ist, ferner A ein gegebener Punkt außerhalb der gegebenen Geraden KE, und werde ein Punkt L so bestimmt, daß

$$KL:AL = u:a$$

ist, so wird

$$AE \cdot a - KE \cdot u = Mi,$$

wenn

$$\sin KAE = \frac{u}{a}$$

ist, d. h. wenn E auf L fällt.“

Aus der Figur folgt

$$KL:LE = HL:LV,$$

$$KE:KL = HV:HL,$$

$$KE:HV = KL:HL = AL:KL = a:u$$

$$KE \cdot u = HV \cdot a$$

$$AE \cdot a - KE \cdot u = (AE - HV) \cdot a = (AH + VR) \cdot a,$$

ein Ausdruck, der seinen kleinsten Wert erreicht, wenn VR verschwindet, also E auf L fällt.

Fig. 6. Sind dann A, die Entfernungen AK und EK' gegeben, wobei KL und K'L' parallele Linien sind, bezeichnen ferner a, u, u' gegebene Strecken und E und e zwei Punkte auf den Parallelen, so wird

$$AE \cdot a - KE \cdot u - K'e \cdot u' = Mi,$$

wenn

$$a) \sin KAE = \frac{u}{a}, \quad b) \sin K'Ee = \frac{u'}{a}$$

ist. Denn im Falle a) wird

$$AE \cdot a - KE \cdot u = Mi,$$

und im Falle b)

$$Ee \cdot a - K'e \cdot u' = Mi,$$

darum auch ihre Summe.

Wir können das Lemma dahin verallgemeinern, dafs wir sagen: „Damit

$$(eEE'E'' \dots) \cdot a - KE \cdot u - K'E' \cdot u' - K''E'' \cdot u'' - \dots = Mi$$

sei, müssen die Beziehungen gelten

$$\sin KeE = \frac{u}{a}, \quad \sin K'EE' = \frac{u'}{a}, \quad \sin K''E'E'' = \frac{u''}{a}, \dots \text{“} —$$

Fig. 8. Betrachten wir den Punkt E der gesuchten Kurve mit den Koordinaten x und y, ziehen die Ordinaten EP und ep, wo e dem E benachbart sei, und verlängern EP über P hinaus um das gegebene u, sodafs

$$PM = u$$

wird, so ist

$$KE \cdot u = u \cdot dx.$$

Wir machen dann dieselbe Konstruktion für jeden auf E folgenden Kurvenpunkt und finden eine neue Kurve mMM'.... Ist nun u so beschaffen, dafs jedes u Funktion der zugehörigen Ordinate y ist, also

$$u = f(y),$$

so haben wir

$$(eEE'E'.....).a - \int f(y).dx = M_i$$

zu machen. Hier ist aber $(eEE'E'.....)$ die gegebene Länge der ganzen Kurve, a ist der Wert von u , der dem letzten gegebenen Kurvenpunkt D entspricht, also auch gegeben, so daß $(eEE'E'.....).a$ einen konstanten Wert behält, also auf die M_i -frage keinen Einfluss hat. Somit bleibt

$$\int f(y).dx = M_a.$$

Die Lösung liefert uns die Benutzung des Lemma: Es muß der Sinus des Winkels, den die Ordinate mit der Kurve in jedem Punkte bildet, also

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{a} = \frac{f(y)}{a}$$

werden.

Sei nun $qR \parallel AX$, $\chi P \parallel AX$
gezogen, doch so, daß

$$p\chi = f(pq) = \text{const.}$$

werde, dann ist die Fläche $\chi MNP = M_a$ oder $= M_i$, je nachdem qR und die X -Axe auf derselben oder verschiedenen Seiten der Kurve eD liegen.

Denn da $pmM_{II} = M_a$ gefunden wurde und das Rechteck $p\chi P_{II}$ gegeben ist, wird $\chi MNP = M_a$, wenn χP und die X -Axe auf derselben Seite von mN , also wenn qR mit der X -Axe auf derselben Seite von eD liegen. Es wird hingegen $\chi MNP = M_i$, wenn die angegebenen Strecken auf verschiedenen Seiten der Kurve liegen. Denn dann ist das Rechteck $p\chi P_{II}$ größer als die Fläche pmN_{II} , die ein M_a darstellt. Ziehen wir daher die größte Fläche von dem Rechteck ab, so muß die übrigbleibende Fläche ein M_i sein.

Nun war der Umfang der Kurve eD gegeben, und die Ordinate PM , die wir u nannten, war Funktion von y . Diese Ordinate setzt sich jetzt zusammen aus MX und XP : Dabei bleibt $XP = c$, also immer konstant, während MX Funktion von y wird, und es kommt

$$u = c + f(y).$$

Nach dem Lemma ist daher die Fläche $\chi mNP = M_a$ für die Kurve

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c + f(y)}{a},$$

und sie erreicht ein M_i für die Kurve

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c - f(y)}{a}.$$

Denn im ersten Falle ist

$$PM = XM + XP,$$

und im zweiten

$$PM = XM - XP;$$

was ja entscheidend für das M_a^i war. Damit ist das erste Problem gelöst; man bemerke die Übereinstimmung mit dem Bernoullischen Resultat.

2) Zur Lösung des zweiten isoperimetrischen Problems, welches eine Kurve $y = \varphi(x)$ sucht, für welche $\int f(s) \cdot dx = M_a^i$ wird, benutzt Maclaurin das folgende Lemma: „Seien b und u gegebene Strecken, ferner die Richtung AL bezeichnet, endlich A und E gegebene Punkte und EK senkrecht auf AL , so ist

$$EK \cdot b + AK \cdot u = Ma,$$

wenn

$$\operatorname{tg} AEK = \frac{u}{b}$$

wird.“

In der That, beschreibt man um A mit dem Radius AE einen Kreisbogen, der AL in G schneidet, und errichtet man in G die Tangente, deren Länge Gg so bestimmt wird, daß

$$Gg : AG = u : b,$$

so wird Ag eine bekannte Strecke sein. Verlängert man dann EK bis O , so kommt

$$KO : AK = Gg : AG = u : b$$

$$AK \cdot u = KO \cdot b.$$

$$EK \cdot b + AK \cdot u = (EK + KO) \cdot b = EO \cdot b,$$

welcher Ausdruck mit EO sein Ma erreicht. Nun wird $EO = Ma$, wenn die Tangente in E parallel mit Ag läuft, d. h. wenn AE senkrecht auf Ag steht. Dann ergiebt sich aber

$$AK : KE = Gg : AG = u : b$$

$$\operatorname{tg} AEK = \frac{u}{b}.$$

Verallgemeinert lautet dieser Satz: „Damit

$$ep \cdot b + KE \cdot u + K'E' \cdot u' + K''E'' \cdot u'' + \dots = Ma$$

werde, müssen die Beziehungen gelten

$$\operatorname{Fig. 8.} \quad \operatorname{tg} KeE = \frac{u}{b}, \quad \operatorname{tg} K'EE' = \frac{u'}{b}, \quad \operatorname{tg} K''EE'' = \frac{u''}{b}, \dots$$

Nehmen wir e als Anfangspunkt, betrachten die Punkte $e, E, E', \dots$ als benachbarte Kurvenpunkte und konstruieren über $eEE' \dots$ die neue Kurve $mMM' \dots$ so, daß ihre Ordinaten u Funktionen des Bogens s sind,

$$MP = u = f(s),$$

so liefert das Lemma als Bedingung dafür, daß

werde, die Gleichung $\int f(s) \cdot dx = Ma$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(s)}{b},$$

die in der analogen Weise wie beim ersten Problem übergeht in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c + f(s)}{b},$$

wenn $\int f(s) \cdot dx = M_a^i$ werden soll, indem die Konstante c dann die nähere Bestimmung ergibt.

Man sieht, wie Maclaurin auf einem ganz originellen Weg zur Lösung der die damalige Zeit beschäftigenden Probleme gelangt ist. Dieselbe war aber zu wenig allgemein, konnte darum keine Antwort auf verwickeltere Fragen geben und geriet bald in Vergessenheit, besonders durch die lichtvollen und klaren Auseinandersetzungen Eulers über denselben Gegenstand.

Sechstes Kapitel.

Die Arbeiten Leonhard Euler's bis zum Jahre 1760.

Als Euler seine Untersuchungen über das isoperimetrische Problem begann, lagen schon die Lösungen Bernoulli's und Taylor's vor; daher ging sein ganzes Bestreben dahin, die bereits gegebenen Methoden zu verallgemeinern. Dies geschah sofort in der ersten Arbeit, die er über diesen Gegenstand veröffentlichte*), und die den Titel trägt: „Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis.“

Euler arbeitet hier noch ganz in der Bernoulli'schen Art; er hält an der Annahme fest, daß das M_a^i für die ganze Kurve Geltung hat, wenn es auf einem Teil derselben besteht. Indem er alle M_a^i -Probleme als isoperimetrische Probleme im weitesten Sinne bezeichnet, teilt er dieselben in drei Klassen ein, wobei er sich wol bewußt ist, wie verschieden sich dieselben verhalten.

1) Unter allen Kurven diejenige zu suchen, welche eine Eigenschaft A im größten oder kleinsten Maaße besitzt.

2) Unter allen Kurven, die eine Eigenschaft A gemeinsam haben, die zu finden, für welche $B = M_a^i$ wird.

3) Unter allen Kurven, für welche A und B gemeinsam sind, die zu suchen, für welche $C = M_a^i$ wird.

*) Comment. Acad. Petrop. 1732/33, Band VI.

Zur Lösung von Aufgaben der ersten Klasse genügt die Betrachtung von zwei benachbarten Elementen; die Lösung der Aufgaben der zweiten Klasse erfordert drei, die der dritten Klasse vier benachbarte Elemente. Die Probleme der ersten Klasse heißen absolute, die der zweiten und dritten relative Probleme.

Das isoperimetrische Problem im engeren Sinne gehört hiernach zur zweiten Klasse, und ich wende mich daher zur Lösung der Probleme der zweiten Klasse, um dann, nachdem ich gezeigt habe, wie es Euler gelingt, dieselben auf solche der ersten Klasse zurückzuführen, diese zu betrachten.

Soll unter allen Kurven, welche eine Eigenschaft A gemeinsam haben, eine solche gesucht werden, der eine Eigenschaft B im höchsten Grade zukommt: dann müssen beide Eigenschaften A und B den Elementen ab , bc , cd der gesuchten Kurve und den Elementen $a\beta$, $\beta\gamma$, γd der benachbarten Kurve in gleicher Weise angehören. Auf die letzteren bezogen seien die beiden Eigenschaften $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genannt. Bei der Verschiebung der Elemente $a\beta$, $\beta\gamma$, γd ist

$$1) \quad \begin{cases} a\beta = ab + \beta m = ab + \frac{bM}{ab} \cdot b\beta, \\ \beta\gamma = bc - (bu + cv) = bc - \frac{cN}{bc} \cdot (b\beta + c\gamma), \\ \gamma d = cd + \gamma n = cd + \frac{Pd}{cd} \cdot c\gamma. \end{cases}$$

Setzen wir also die gemeinsamen Eigenschaften einander gleich $A = \mathcal{A}$, $B = \mathcal{B}$,

so entstehen zwei Gleichungen, deren Glieder multipliziert sind in die Zuwüchse $b\beta$, $c\gamma$. Eliminieren wir deren Verhältniss, so erhalten wir eine Gleichung, die nur noch bekannte Größen enthält, und das ist die Differentialgleichung der gesuchten Kurve.

Jene beiden Gleichungen haben die Form

$$\begin{cases} P \cdot b\beta + Q \cdot c\gamma = 0, \\ R \cdot b\beta + S \cdot c\gamma = 0. \end{cases}$$

In diesen ist, weil eine unendlich kleine Verrückung geschah, $Q = P + dP$, $S = R + dR$.

Dann kommt aber

$$2) \quad \begin{cases} P \cdot (b\beta + c\gamma) + dP \cdot c\gamma = 0, \\ R \cdot (b\beta + c\gamma) + dR \cdot c\gamma = 0, \end{cases}$$

und hieraus folgt $P \cdot dR = R \cdot dP$, eine Gleichung, die integriert ergiebt

$$3) \quad P + a \cdot R = 0.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Kurve, in der a

die Integrationskonstante bezeichnet. Damit ist aber das Problem der zweiten Klasse zurückgeführt auf ein solches der ersten. Die Aufgabe Eulers wird es sein, die Werte P und R, welche aus den gegebenen Eigenschaften A und B als Variationswerte hervorgehen, wirklich zu bilden. Er thut dies für verschiedene Annahmen derjenigen Gröfse, welche gemeinsam sein soll, indem er vom einfachsten anfangend zu den zusammengesetztesten Ausdrücken fortschreitet, und giebt am Schlusse eine Tabelle von Formeln, aus denen man für eine gegebene Funktion f den Variationswert P entnehmen kann.

Wir wollen die Rechnung durchführen für den Fall, daß

$$B \equiv \int f \cdot ds^m \cdot dy^n \cdot dx^{1-m-n},$$

worin f Funktion von x, y, s und $dx = \text{const.}$ sei, also

$$df \equiv L \cdot ds + M \cdot dy + N \cdot dx;$$

dann haben wir die Beziehung

$$4) f \cdot ab^m \cdot bM^n + (f + df) \cdot bc^m \cdot cN^n + (f + 2df + d^2f) \cdot cd^m \cdot Pd^n = \\ = f \cdot a\beta^m \cdot \beta M^n + (f + [df]) \cdot \beta \gamma^m \cdot (cN - b\beta - c\gamma)^n + (f + [2df + d^2f]) \cdot \\ \cdot \gamma d^m \cdot (Pd + c\gamma)^n,$$

wo [...] anzeigen soll, daß wir zur benachbarten Kurve übergegangen sind. Bei diesem Übergang ist der Zuwachs von $L \cdot ds$

$$L \cdot \beta m \equiv L \cdot \frac{bM}{ab} \cdot b\beta,$$

der von $M \cdot dy$ $M \cdot b\beta$,

ferner der von $2L \cdot ds + d(L \cdot ds)$

$$(L + dL) \cdot (\beta m - b\mu - c\nu) \equiv (L + dL) \cdot \left\{ \frac{bM}{ab} \cdot b\beta - \frac{cN}{bc} \cdot (b\beta + c\gamma) \right\},$$

und endlich der von $2M \cdot dy + d(M \cdot dy)$
 $-(M + dM) \cdot c\gamma$.

Es ist daher

$$[df] \equiv df + L \cdot \frac{bM}{ab} \cdot b\beta + M \cdot b\beta,$$

$$[2df + d^2f] \equiv 2df + d^2f + (L + dL) \cdot \left\{ \frac{bM}{ab} \cdot b\beta - \frac{cN}{bc} \cdot (b\beta + c\gamma) \right\} - \\ - (M + dM) \cdot c\gamma.$$

Substituieren wir diese Ausdrücke in 4) und bringen alle Glieder auf die rechte Seite, so kommt

$$f \cdot (a\beta^m \cdot \beta M^n - ab^m \cdot bM^n) + (f + df) \cdot [\beta \gamma^m \cdot (cN - b\beta - c\gamma)^n - \\ - bc^m \cdot cN^n] + (f + 2df + d^2f) \cdot [\gamma d^m \cdot (Pd + c\gamma)^n - cd^m \cdot Pd^n] + \\ + [L \cdot \frac{bM}{ab} \cdot b\beta + M \cdot b\beta] \cdot [\beta \gamma^m \cdot (cN - b\beta - c\gamma)^n] + \left\{ (L + dL) \cdot \left[\frac{bM}{ab} \cdot b\beta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{cN}{bc} \cdot (b\beta + c\gamma) \right] - (M + dM) \cdot c\gamma \right\} \cdot \left\{ \gamma d^m \cdot (Pd + c\gamma)^n \right\} = 0.$$

Bedenken wir, daß die Relationen 1) gelten und daß

$$\beta M = bM + b\beta$$

ist, so lautet diese Gleichung, geordnet nach $b\beta$ und $c\gamma$

$$\begin{aligned} & b\beta \{f.(m.ab^{m-2}.Mb^{n+1} + n.ab^m.Mb^{n-1}) - (f+df).(m.bc^{m-2}.cN^{n+1} + \\ & + n.bc^m.cN^{n-1})\} - c\gamma \{(f+df).(m.bc^{m-2}.cN^{n+1} + n.bc^m.cN^{n-1}) - \\ & - (f+2df+d^2f).(m.cd^{m-2}.Pd^{n+1} + n.cd^m.Pd^{n-1})\} + \\ & + b\beta \{L.q.bc^m.cN^n - (L+dL).dq.cd^m.Pd^n + M.bc^m.cN^n\} - \\ & - c\gamma \{(L+dL).(q+dq).cd^m.Pd^n + (M+dM).cd^m.Pd^n\} = 0, \end{aligned}$$

worin

$$q \equiv \frac{bM}{ab}, \quad q + dq \equiv \frac{cN}{bc}$$

gesetzt wurde.

Das ist aber

$$\begin{aligned} & - b\beta \{d.[f.(m.ab^{m-2}.Mb^{n+1} + n.ab^m.bM^{n-1})] - M.bc^m.cN^n\} + \\ & + c\gamma \{d.[(f+df).(m.bc^{m-2}.cN^{n+1} + n.bc^m.cN^{n-1})] - \\ & - (M+dM).cd^m.Pd^n\} + b\beta \{L.q.bc^m.cN^n - (L+dL).dq.cd^m.Pd^n\} - \\ & - c\gamma \{(L+dL).(q+dq).cd^m.Pd^n\} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung

$$E \equiv d.[f.(m.ds^{m-2}.dy^{n+1} + n.ds^m.dy^{n-1})] - M.ds^m.dy^n,$$

so lautet unsre letzte Gleichung

$$\begin{aligned} 5) \quad & b\beta \{L.q.bc^m.cN^n - (L+dL).dq.cd^m.Pd^n - E\} - \\ & - c\gamma \{(L+dL).(q+dq).cd^m.Pd^n - E - dE\} = 0. \end{aligned}$$

Vergleichen wir diese mit

$$b\beta.P - c\gamma.(P + dP) = 0,$$

so läßt sich das Verhältniß von $b\beta$ und $c\gamma$ eliminieren, und wir erhalten

$$\begin{aligned} & \{L.q.bc^m.cN^n - (L+dL).dq.cd^m.Pd^n - E\}.(P + dP) = \\ & = \{(L+dL).(q+dq).cd^m.Pd^n - E - dE\}.P \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} dP \cdot \{L.q.bc^m.cN^n - E\} & = P \cdot \{(L+dL).(q+dq).cd^m.Pd^n - \\ & - L.q.bc^m.cN^n + (L+dL).dq.cd^m.Pd^n - dE\}. \end{aligned}$$

Das giebt

$$\begin{aligned} dP \cdot \{L.q.bc^m.cN^n - E\} & = P \cdot \{d(L.q.bc^m.cN^n - E) + \\ & + L.dq.cd^m.Pd^n\}, \end{aligned}$$

woraus endlich folgt

$$\frac{dP}{P} = \frac{d(L.q.bc^m.cN^n - E)}{L.q.bc^m.cN^n - E} + \frac{L.dq.cd^m.Pd^n}{L.q.bc^m.cN^n - E}.$$

Setzen wir nun

$$bc = ds, \quad cN = dy$$

und integrieren, so kommt, abgesehen von der Integrationskonstanten

$$6) \quad P = (L \cdot q \cdot ds^m \cdot dy^n - E) \cdot e^{\int \frac{L \cdot dq \cdot ds^m \cdot dy^n}{L \cdot q \cdot ds^m \cdot dy^n - E}}.$$

Hieraus lassen sich alle übrigen Formeln der von Euler gegebenen Tabelle ableiten. Wenn also in Sonderheit, wie es bei dem isoperimetrischen Problem der Fall ist, die Bedingung

$$A \equiv \int ds = \text{const.}$$

gegeben ist, dann haben wir in 6) zu setzen

$$f = 1, m = 1, n = 0,$$

also

$$L = 0, M = 0$$

und erhalten

$$7) \quad P \equiv -d \frac{dy}{ds} = -dq.$$

Die Gleichung der gesuchten Kurve bilden wir dann nach 3), indem wir zum Ausdruck 6) den mit einer Konstanten multiplizierten Ausdruck 7) hinzuzählen und die Summe $= 0$ setzen.

Vergleichen wir die so entstehende Differentialgleichung mit der, welche Taylor gefunden hatte, so haben wir, weil nach Taylor

$$B \equiv \int f(x, y, s) \cdot dx$$

ist, in dem Ausdruck 6) $m = 0, n = 0$ zu nehmen und erhalten

$$P \equiv (L \cdot q + M) \cdot e^{\int \frac{L \cdot dq}{L \cdot q + M}},$$

sodafs die gesuchte Differentialgleichung der isoperimetrischen Kurve lautet:

$$8) \quad (L \cdot q + M) \cdot e^{\int \frac{L \cdot dq}{L \cdot q + M}} + a \cdot dq = 0.$$

Differenzieren wir dieselbe und setzen

$$e^{\int \frac{L \cdot dq}{L \cdot q + M}} = \frac{-a \cdot dq}{L \cdot q + M}$$

ein, so kommt

$$L \cdot q \cdot d^2q + M \cdot d^2q - dM \cdot dq - q \cdot dq \cdot dL - 2L \cdot dq^2 = 0,$$

wie wir bei Taylor gefunden hatten. Man erkennt hieraus zugleich, dafs die auf dem Euler'schen Wege erhaltene Gleichung 8) ein erstes Integral der Taylor'schen Differentialgleichung darstellt. —

Im Verlaufe seiner weiteren Forschungen über die Lösung der M_a^i -propleme kam Euler zu Aufgaben, die er mit Hilfe seiner soeben entwickelten Methode nicht zu lösen vermochte. Er kam nämlich auf Funktionen, die von dem ersten, zweiten, auch noch höheren Differentialquotient einer Variablen abhängen. Für diese leitete er eine neue Theorie ab, welche gleichzeitig anwendbar war auf die früheren Fälle, ja welche in ihrem Resultate alle Formeln jener Tabelle zusammenfasste.

Die Abhandlung findet sich im 8. Band der Comment. Acad. Petrop. vom Jahre 1736 und lautet: „Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis“.

Zum ersten Mal wird hier ein Fall behandelt, in dem außer den Größen $s, x, y, p = \frac{dy}{dx}$ auch Differentialquotienten 2. Ordnung vorkommen. Der Grundgedanke aber zur Lösung ist immer noch der frühere: wenn eine Kurve eine M_a^i -Bedingung erfüllen soll, muß dasselbe von jedem kleinen Teil derselben gelten.

Wir betrachten nur die Probleme der ersten Klasse, da ja die isoperimetrischen Probleme auf diese zurückgeführt werden. Ist $\int f \cdot dx$ der Ausdruck, dessen M_a^i -wert gesucht wird, und sei zunächst f nur Funktion von x, y, s, p , sodaß

$$df \equiv L \cdot ds + M \cdot dy + N \cdot dx + V \cdot dp,$$

Fig. 10. dann lautet, wenn bc, cd benachbarte Elemente sind, $\int f \cdot dx$ gebildet nur für $bc = f \cdot dx$ und für $cd = f' \cdot dx$; also für beide zusammen $= (f + f') \cdot dx$.

Es sei oa die gesuchte Kurve,

$$OA = x, Aa = y, oa = s, dx = \text{const.},$$

und es seien die Ordinaten Bb, Cc und Dd gezogen. Dann muß die Eigenschaft

$$\int f \cdot dx = M_a^i$$

für das Element bcd gelten. Wir verrücken daher das Element bcd ein wenig nach byd und bekommen für $\int f \cdot dx$ auf beiden Lagen denselben Wert. Daher giebt die Differenz dieser Werte, gleich 0 gesetzt, eine Gleichung, welche die Natur der Kurve oa näher bestimmt. Diese Differenz läßt sich stets auf die Form

$$P \cdot cy = 0$$

bringen, wo P Funktion von x, y, s und deren Differentialquotienten ist, und die Gleichung

$$P = 0$$

bestimmt die gesuchte Kurve. Die Berechnung von P giebt hier

$$1) \quad P \equiv L \cdot q \cdot dx + M \cdot dx - dV^*),$$

wo gesetzt ist

$$q \equiv \frac{dy}{ds}.$$

Es trete ferner der Fall ein, wo Differentialquotienten zweiter Ordnung in f eingehen, wo also

$$df \equiv L \cdot ds + M \cdot dy + N \cdot dx + V \cdot dp + W \cdot dr,$$

wenn

$$p \equiv \frac{dy}{dx}, \quad r \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$$

bezeichnet. Jetzt genügt es nicht mehr, den Effekt zu untersuchen, der durch Variation einer Ordinate für zwei benachbarte Elemente bc, cd eintritt: es ist klar, daß das vorhergehende Element ab und das folgende de auch in Rechnung gezogen werden müssen, wie man unmittelbar erkennt, wenn man die Differentiale als Grenzwerte endlicher Differenzen auffaßt. Bezeichnen wir die Elemente und die ihnen zugehörigen Größen durch Accente, so ist

$$y = Aa, y' = Bb, y'' = Cc, y''' = Dd, y^{IV} = Ee, \quad \text{Fig. 10.}$$

$$p = \frac{bM}{dx}, \quad p' = \frac{cN}{dx}, \quad p'' = \frac{Pd}{dx}, \quad p''' = \frac{Qe}{dx},$$

$$r = \frac{cN - bM}{dx^2}, \quad r' = \frac{Pd - cN}{dx^2}, \quad r'' = \frac{eQ - Pd}{dx^2}.$$

Führen wir das Element abcde über in ab γ de, so folgt aus der Figur

$$ds = dx = dy = dp = 0, \quad dr = \frac{c\gamma}{dx^2},$$

weil erhalten wird

$$r = \frac{\gamma N - bM}{dx^2}.$$

Ebenso

$$ds' = dx = dy' = 0, \quad dp' = \frac{c\gamma}{dx},$$

$$dr' = \frac{pd - \gamma N}{dx^2} - \frac{Pd - cN}{dx^2} = -\frac{2c\gamma}{dx^2};$$

$$ds'' = \gamma n = \frac{cN \cdot c\gamma}{bc} = \frac{dy' \cdot c\gamma}{bc},$$

$$dy'' = c\gamma,$$

$$dp'' = -\frac{c\gamma}{dx},$$

$$dr'' = \frac{c\gamma}{dx^2},$$

*) siehe Comm. Ac. Petr. VIII, pag. 163, § 6.

und endlich

$$\begin{aligned} ds''' &= q' \cdot c\gamma - q'' \cdot c\gamma = -c\gamma \cdot dq' \\ dy''' &= dp''' = dr''' = 0. \end{aligned}$$

Für abcde giebt $\int f \cdot dx$ den Wert

$$f \cdot dx + f' \cdot dx + f'' \cdot dx + f''' \cdot dx.$$

dessen Differential, aus der Verrückung des Punktes c nach γ entstanden, gleich 0 gesetzt werden muß. Wir erhalten nun aber die einzelnen Differentiale, wie folgt

$$df \cdot dx = \frac{W \cdot c\gamma}{dx},$$

$$df' \cdot dx = V' \cdot c\gamma - \frac{2W' \cdot c\gamma}{dx},$$

$$df'' \cdot dx = L'' \cdot q' \cdot dx \cdot c\gamma + M'' \cdot c\gamma \cdot dx - V'' \cdot c\gamma + \frac{W'' \cdot c\gamma}{dx},$$

$$df''' \cdot dx = -L''' \cdot dq' \cdot dx \cdot c\gamma.$$

Durch Addition dieser Größen ergibt sich

$$P \cdot c\gamma = \left(\frac{d^2 W}{dx} - dV + M \cdot dx + L \cdot q \cdot dx \right) \cdot c\gamma$$

und somit die Gleichung

$$2) \quad \frac{d^2 W}{dx} - dV + M \cdot dx + L \cdot q \cdot dx = 0.$$

Die Variation zweier Ordinaten, die bei Aufgaben der zweiten Klasse durchgeführt werden muß, liefert bei Euler für P in den beiden Fällen, wo in f entweder nur p oder auch r vorkommt, die Werte

$$3) \quad P = e^{\int \frac{L \cdot dx \cdot dq}{-dV + dx \cdot (L \cdot q + M)}} \cdot [-dV + dx \cdot (L \cdot q + M)],$$

und

$$4) \quad P = e^{\int \frac{L \cdot dx^2 \cdot dq}{d^2 W - dV \cdot dx + dx^2 (L \cdot q + M)}} \cdot [d^2 W - dV \cdot dx + dx^2 (L \cdot q + M)].$$

Euler giebt auch Ausdrücke für P, wenn f noch ein Integral $\int \varphi \cdot dx$ enthält*). Indessen dieselben sind alle falsch, wie auch die vorigen Werte, weil sie den Bogen enthalten. Nehmen wir $L = 0$, so kommt richtig aus 2)

$$5) \quad M - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2 W}{dx^2} = 0,$$

und dieselbe Differentialgleichung resultiert, wenn wir in der Lösung der zweiten Klasse, also in 4), $L = 0$ setzen; sie ergiebt überhaupt in allen höheren Klassen die Lösung.

*) § 28 ff.

Weitergehend schließt Euler, wenn f Differentialquotienten höherer Ordnung, aber nicht s oder ein anderes Integral enthält, also wenn

$$df \equiv M \cdot dy + N \cdot dx + V \cdot dp + W \cdot dr + X \cdot dt + \dots$$

ist, daß

$$6) \quad P \equiv M - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} - \frac{d^3X}{dx^3} + \dots = 0$$

die allgemeine Lösung sei: es ist die unbestimmte Differentialgleichung des Problems.

Indem die Frage behandelt wird, auch dann P anzugeben, wenn f den Bogen s oder eine andere Integralfunktion enthält, kommt Euler zu keiner befriedigenden Lösung: aber er kommt zu dem Schlusse, daß für Funktionen f , die höhere Differentialquotienten als den zweiten enthalten, P überhaupt nicht zu berechnen und das Prinzip da nicht mehr anwendbar sei, wo der Wert von f für jedes Kurvenelement nur von diesem abhängt. Als Grund dieser Erscheinung findet sich, daß beim Verschieben des Punktes c nach γ nicht nur der auf das Element bcd bezügliche Ausdruck, sondern überhaupt $\int f \cdot dx$ geändert wird. Man kann daher die Änderung des unendlich kleinen Teiles einer Kurve nicht als Bedingung für die Änderung des Integrals aufrecht erhalten.

In der That führen wir c in γ über, dann erhält der ganze Teil zd der Kurve oz einen andern Wert von $\int f \cdot dx$, der größer oder kleiner sein kann, auch wenn der dem Element bcd zugehörige Wert ein M_a^i ist. Man darf darum nicht mehr allein betrachten, was in diesen Elementen vorgeht, sondern man muß gerade jene Lage der Elemente suchen, welche für alle folgenden Elemente, also für den ganzen Teil d bis z $\int f \cdot dx = M_a^i$ erzeugt.

Indessen in einem Falle bleibt das Prinzip von der Betrachtung gewisser Kurvenelemente doch anwendbar; wenn nämlich der Bogen s oder die in f auftretende Integralfunktion gerade die allen Kurven gemeinsame Bedingung ist, d. h. wenn sie einen konstanten Wert besitzt. Daher sind die erhaltenen Lösungen für isoperimetrische Kurven richtig. Man kann sich dann denken, daß die Kurventeilchen auch nach der Verschiebung dieselbe Länge behalten, wodurch die Nichtabhängigkeit zwischen den Teilchen wieder hergestellt wird. Man wendet aber dann eigentlich nicht das obige Prinzip an, sondern das umgekehrte, wonach die Beschaffenheit des Kurvenelements von dem Werte der ihm zugehörigen Funktion f abhängt: und das ist stets richtig. —

Es konnte sich ein Mann wie Euler, der niemals vor den Schwierigkeiten zurückschreckte, die sich ihm entgegenstellten, nicht mit einem Resultate zufriedengeben, welches ihm nur sagte, wie er nicht zu verfahren hätte. Er hatte den Mangel bereits in dem bisher fälschlich als allgemein angenommenen Prinzip entdeckt, daß der Wert einer Funktion f , und damit auch der von $\int f \cdot dx$, für ein Kurvenelement von dem Element selbst abhinge, und mußte ein neues suchen, welches in völliger Allgemeinheit alle möglichen Probleme vom Größten und Kleinsten löste.

Acht Jahre lang hatte er sich mit dieser Aufgabe beschäftigt, bis er 1744 seine gewonnenen, neuen und diesmal richtigen Resultate in seinem berühmten Werke „*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimique proprietate gaudentes*“ veröffentlichte. Hier finden sich sogleich im ersten Kapitel, Artikel 38—47 die beiden wichtigen Sätze, welche die Allgemeinheit der früheren Methoden sofort über den Haufen werfen.

Fig. 11. 1) „Wenn amz eine Kurve ist, für welche $\int f \cdot dx = M_a^i$ wird, und wenn f eine algebraische oder bestimmte, d. h. von Integralen freie Funktion von $x, y, p, q, r, \dots$ ist, wo $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt wird: dann kommt irgend einem Teil mn dieser Kurve dieselbe Voraussetzung zu, so daß für ihn, bezogen auf seine Abscisse MN , der Wert von $\int f \cdot dx$ auch gleichzeitig M_a^i ist.“

2) „Wenn dagegen amz eine der Abscisse AX entsprechende Kurve darstellt, auf welcher $\int f \cdot dx = M_a^i$ ist, während die Funktion unter dem Integralzeichen auch Integrale enthält: so ist diese M_a^i -eigenschaft einem beliebigen Teil der Kurve nicht mehr eigen, sondern nur der ganzen, der Abscisse AX entsprechenden Kurve“.

Ich will in Kürze den Euler'schen Beweis des letzten Satzes skizzieren.

Sei in der That die Kurve amz durch die Ordinate Mm in zwei Teile geteilt und sei der Wert von $\int f \cdot dx$, bezogen auf am , $= P$, und bezogen auf $mz = Q$; dann müßte

$$P + Q = M_a^i$$

sein. Beschränken wir uns auf den Fall des M_a , so ist dies nur möglich, vorausgesetzt, daß P und Q von einander unabhängig seien, wenn einzeln

$$P = M_a, Q = M_a$$

ist. In unserm Falle aber, wo f auch Integrale enthält, hängt

der Wert von Q nicht nur von mz , sondern auch von am , also auch von P ab. Und dann braucht nicht auch $P = Ma$, zu werden, damit $P + Q = Ma$ sei. Denn gesetzt, es wäre $Q = Ma$ für mz , und man änderte die Kurve mz ein wenig, so daß Q in $Q - q$ übergehen würde, dann kann der Wert von P bei solcher Änderung zunehmen, etwa um p . Nach der Änderung ist aber $\int f \cdot dx$ für den Teil mz kein Ma mehr, während für die ganze Kurve besteht

$$\int f \cdot dx \equiv P + p + Q - q = Ma,$$

da es sich immer so einrichten läßt, daß $p > q$ werde. —

Die neue und allgemeine Lösung Euler's geht davon aus, daß aus der Variation einer einzigen Ordinate der Kurve der Variationswert der Formel abgeleitet wird, die ein M_a^i erreichen soll. Dazu setzt Euler an die Stelle der Differentiale der Ordinate die Differenzen der aufeinanderfolgenden Ordinaten und an Stelle der Integrale die Summen der Elemente, der ganzen Ausdehnung der Kurve entsprechend. „Wird so seine Methode sehr lang und dem strengen Geiste des Differentialkalküls entfremdet, so gehören seine Schlusfolgerungen doch zu den schönsten und elegantesten, welche die Mathematik aufzuweisen hat.“*)

Da sich im Verlaufe seiner Untersuchungen herausstellte, wie sehr die einzelnen Operationen an den verschiedenen Punkten derselben Kurve übereinstimmten: daß derselbe Ausdruck, den er als Resultat der Variation einer Ordinate y gefunden hatte, auf die nächstfolgende Ordinate bezogen, das Resultat der Variation dieser Ordinate gab, u. s. f.: so konnte Euler sofort Probleme behandeln, welche die Variation mehrerer Ordinaten erfordern.

Bezeichnen wir durch n' den unendlich kleinen Zuwachs der Ordinate y , durch $o\omega$ den der nächstfolgenden $y + dy$, und durch $p\pi$ den der dieser benachbarten $y + 2dy + d^2y$; ferner mit $P \cdot n'$ den Variationswert des unbestimmten Integrals

$$V \equiv \int f \cdot dx,$$

welches ein M_a^i werden soll, so haben wir für den Variationswert von V , bezogen auf die nächstfolgende Ordinate,

$$(P + dP) \cdot o\omega,$$

und auf die drittfolgende,

$$(P + 2dP + d^2P) \cdot p\pi.$$

Variieren wir also nur eine Ordinate, so muß nach der Natur des M_a^i

$$a) \quad P \cdot n' = 0$$

*) Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions.

sein; bei Variation zweier benachbarter Ordinaten kommt

$$P \cdot n\nu + (P + dP) \cdot o\omega = 0,$$

oder

$$b) \quad P \cdot (n\nu + o\omega) + dP \cdot o\omega = 0,$$

und bei der von drei aufeinanderfolgenden

$$P \cdot n\nu + (P + dP) \cdot o\omega + (P + 2dP + d^2P) \cdot p\pi = 0$$

oder

$$c) \quad P \cdot (n\nu + o\omega + p\pi) + dP \cdot (o\omega + 2p\pi) + d^2P \cdot p\pi = 0.$$

Soll die Kurve gefunden werden, für welche $\int f \cdot dx$ ein absolutes M_i erreicht, so ist deren Gleichung nach a)

$$1) \quad P = 0.$$

Soll unter allen den Kurven, welche die gemeinsame Eigenschaft

$$W \equiv \int \varphi \cdot dx$$

besitzen, eine solche bestimmt werden, auf welcher $V = M_i$ wird, und ist $Q \cdot n\nu$ der Variationswert von W , so müssen nach b) die beiden Gleichungen bestehen

$$P \cdot (n\nu + o\omega) + dP \cdot o\omega = 0,$$

$$Q \cdot (n\nu + o\omega) + dQ \cdot o\omega = 0,$$

aus denen folgt

$$\frac{dP}{P} = \frac{dQ}{Q},$$

oder

$$2) \quad P + a \cdot Q = 0,$$

wo a eine willkürliche Konstante ist. Sind der gesuchten Kurve außer $V = M_i$ noch die beiden Bedingungen

$$W \equiv \int \varphi \cdot dx, \quad Z \equiv \int \psi \cdot dx$$

auferlegt, und sind $Q \cdot n\nu$ und $R \cdot n\nu$ die respektiven Variationswerte, so bestehen nach c) die drei Gleichungen

$$d) \quad \begin{cases} P \cdot (n\nu + o\omega + p\pi) + dP \cdot (o\omega + 2p\pi) + d^2P \cdot p\pi = 0, \\ Q \cdot (n\nu + o\omega + p\pi) + dQ \cdot (o\omega + 2p\pi) + d^2Q \cdot p\pi = 0, \\ R \cdot (n\nu + o\omega + p\pi) + dR \cdot (o\omega + 2p\pi) + d^2R \cdot p\pi = 0, \end{cases}$$

aus denen als Gleichung der gesuchten Kurve folgt

$$e) \quad \begin{vmatrix} P, & dP, & d^2P \\ Q, & dQ, & d^2Q \\ R, & dR, & d^2R \end{vmatrix} = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert zwei willkürliche Konstanten.

Um aber die Integration von e) auszuführen, erkennt man, daß die Gleichung

$$3) \quad P + a \cdot Q + b \cdot R = 0$$

für ganz beliebige Werte a und b den drei Gleichungen d) genügt. In der That, multiplizieren wir die zweite Gleichung

chung d) mit a , die dritte mit b und addieren beide zur ersten, so entsteht infolge der Determinante e) eine Identität. Die Gleichung 3) mit zwei willkürlichen Konstanten ist daher die vollständige Integralgleichung von e.).

Dieselbe Gleichung 3) erhält man, wenn man das absolute Problem

$$\int f \cdot dx + a \cdot \int g \cdot dx + b \cdot \int \psi \cdot dx = M_a^i$$

lösen will; dadurch kommt Euler zu dem schönen Satze: „Um eine Kurve zu finden, welcher unter allen Kurven von einer oder mehreren bekannten Eigenschaften die des M_a^i zukommt, hat man dem Differentialwerte des Ausdruckes, der ein M_a^i werden soll, die Differentialwerte der anderen Eigenschaften hinzuzufügen, jeden multipliziert in einen konstanten Koeffizienten und diese Summe gleich 0 zu setzen.“

Die Bestimmung dieser Konstanten ist nach Lösung des Problems daraus zu treffen, daß die gemeinsamen Eigenschaften überall gegeben sind. Zugleich liegt in diesem Satze der weitere: daß man mit der Lösung der Aufgabe $V = M_a^i$, $W =$ gegeben gleichzeitig die reciproke Aufgabe $W = M_a^i$, $V =$ gegeben findet; denn beide Probleme werden gelöst durch die eine Gleichung

$$V + a \cdot W = M_a^i. —$$

Es bleibt uns noch übrig, den Variationswert $P \cdot n'$ wirklich zu bilden; wir wählen dazu den Fall wo die Funktion f auch Integralausdrücke enthält, da hierbei der Unterschied der jetzigen Lösung mit der früheren zu Tage tritt. Daher behandeln wir mit Euler das Problem:

Wenn π eine unbestimmte Integralfunktion ist

$$\pi \equiv \int [f] \cdot dx,$$

sodafs

$$1) \quad d[f] \equiv [M] \cdot dy + [N] \cdot dx + [P] \cdot dp + \dots$$

und wenn f eine Funktion sowohl von π , wie von $x, y, p, q, \dots$ bezeichnet, also

$$2) \quad df \equiv L \cdot d\pi + M \cdot dy + N \cdot dx + P \cdot dp + \dots,$$

so soll diejenige Kurve gefunden werden, welche für eine gegebene Abscisse $x = a$ $\int f \cdot dx = M_a^i$ macht.

Es werde eine Ordinate Hh gezogen, über welche hinaus Fig. 11. die Wirkung der Änderung der Ordinate Nn um n' nicht bemerkbar sein soll; teilt man dann die Fläche $HhzZ$ in unendlich kleine Elemente durch die Ordinaten $Ii, Kk, Ll, \dots$, so muss sein

$$\int f \cdot dx + f \cdot dx + f' \cdot dx + f'' \cdot dx + \dots = M_a^i,$$

und deshalb nach der Natur des M_a^i

$$d\int f \cdot dx + df \cdot dx + df' \cdot dx + df'' \cdot dx + \dots = 0.$$

Nun ist aber nach Voraussetzung

$$3) \begin{cases} d\int f \cdot dx = 0, \\ df \cdot dx = dx \cdot (L \cdot d\pi + M \cdot dy + N \cdot dx + P \cdot dp + \dots), \\ df' \cdot dx = dx \cdot (L' \cdot d\pi' + M' \cdot dy' + N' \cdot dx + P' \cdot dp' + \dots), \\ df'' \cdot dx = dx \cdot (L'' \cdot d\pi'' + M'' \cdot dy'' + N'' \cdot dx + P'' \cdot dp'' + \dots), \end{cases}$$

etc. etc. Die aus der Verrückung $n\nu$ hervorgehenden Werte von $d\pi$, $d\pi'$, $d\pi''$, ...; dy , dy' , dy'' , ...; dp , dp' , dp'' , ... werden berechnet und eingesetzt. Sie finden sich in dem Euler'schen Werke im dritten Kapitel, propos. I., und im zweiten Kapitel, propos. V. Addiert man dann die Ausdrücke 3), so erhält man den Differentialwert von $\int f \cdot dx$ für die gegebene Abscisse $x = a$, nämlich

$$4) \quad n\nu \cdot dx \cdot \left\{ [M] \cdot (H - \int L \cdot dx) - \frac{d \cdot [P] \cdot (H - \int L \cdot dx)}{dx} + \frac{d^2 \cdot [Q] \cdot (H - \int L \cdot dx)}{dx^2} - \dots + M - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \dots \right\},$$

worin

$$H = \int_{x=a}^x L \cdot dx.$$

Bei der Verrückung zweier aufeinanderfolgenden Ordinaten kommt hiernach

$$5a) \quad n\nu \cdot dx \cdot \left\{ [M] \cdot (H - \int L \cdot dx) - \frac{d \cdot [P] \cdot (H - \int L \cdot dx)}{dx} + \dots + M - \frac{dP}{dx} + \dots \right\} + o\omega \cdot dx \cdot \left\{ [M_1] \cdot (H - \int L_1 \cdot dx) - \frac{d \cdot [P_1] \cdot (H - \int L_1 \cdot dx)}{dx} + \dots + M_1 - \frac{dP_1}{dx} + \dots \right\}.$$

Würde die Funktion f nicht von π abhängen, so wären alle in [...] eingeschlossenen Glieder in 5a) $= 0$, und wir erhielten den einfacheren Ausdruck

$$5b) \quad n\nu \cdot dx \cdot \left\{ M - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \dots \right\} + o\omega \cdot dx \cdot \left\{ M_1 - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 Q_1}{dx^2} - \dots \right\}.$$

Die Formel 4) giebt uns den wahren Variationswert $P \cdot n\nu$. Es sei der gesuchten Kurve eine zweite Bedingung vorgeschrieben, etwa $W = \int \varphi \cdot dx$; dann ist nach 5) der Variationswert von W zu bilden für zwei simultane Verrückungen $n\nu$ und $o\omega$, derselbe gleich 0 zu setzen, und aus der so entstehenden Gleichung und dem gleich 0 gesetzten Ausdruck 5) sind $n\nu$ und $o\omega$ in ihrem Verhältnis zu eliminieren.

Im isoperimetrischen Problem fällt die gegebene Eigenschaft W der Kurve zusammen mit der Funktion π . Wenn

wir daher unter allen Kurven, welche sich auf dieselbe Abscisse a beziehen, und welche denselben Wert des Ausdruckes

$$\pi \equiv \int [f] \cdot dx$$

behalten, diejenige suchen, auf der $\int f \cdot dx = M_a^i$ wird, wo f auch Funktion von π ist, so haben wir aus der Gleichung 5 a) und aus

$$n\nu \cdot dx \cdot \left\{ [M] - \frac{d[P]}{dx} + \dots \right\} + o\omega \cdot dx \cdot \left\{ [M_1] - \frac{d[P_1]}{dx} + \dots \right\} = 0,$$

deren linke Seite den Differentialwert von π darstellt, das Verhältniss von $n\nu$ und $o\omega$ zu eliminieren.

Ist speciell $\pi = s$, oder

$$\pi = \int \sqrt{1+p^2} \cdot dx,$$

so kommt

$$[M] = [N] = 0, \quad [P] = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad [Q] = 0, \dots$$

und

$$df = L \cdot ds + M \cdot dy + N \cdot dx + P \cdot dp + \dots$$

Hier resultiert als Differentialwert von $\int f \cdot dx$, bezogen auf $n\nu$

$$n\nu \cdot dx \cdot \left\{ M - \frac{dP}{dx} + \dots - \frac{d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot (H - \int L \cdot dx)}{dx} \right\},$$

und als Differentialwert von π

$$n\nu \cdot dx \cdot \left\{ - \frac{d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} \right\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = q,$$

wenn wir die im Taylor'schen Problem eingeführte Bezeichnung beibehalten, und so kommt nach der Relation 2) (pag. 48)

$$6) \quad \{ M \cdot dx - dP + \dots - d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q] \} - a \cdot dq = 0$$

als Gleichung der gesuchten Kurve. Um den von Taylor behandelten Fall abzuleiten, muß f als Funktion von s , x , y genommen, also $P = Q = \dots = 0$ gesetzt werden: dann lautet aber 6)

$$7) \quad M \cdot dx - d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q] - a \cdot dq = 0$$

oder

$$M \cdot dx - dq \cdot (H - \int L \cdot dx) + L \cdot q \cdot dx - a \cdot dq = 0.$$

Differenzieren wir diese Formel, so kommt

$$dM \cdot dx - d^2q \cdot (H - \int L \cdot dx) + 2L \cdot dq \cdot dx + dL \cdot q \cdot dx - a \cdot d^2q = 0;$$

und setzen wir

$$H - \int L \cdot dx = \frac{M \cdot dx + L \cdot q \cdot dx - a \cdot dq}{dq},$$

so erhalten wir nach Division mit dx

$$dM \cdot dq - L \cdot q \cdot d^2q - M \cdot d^2q + 2L \cdot dq^2 + q \cdot dL \cdot dq = 0.$$

Dieses ist die Taylor'sche Gleichung. Daher liefert Gleichung 7) ein Integral der Taylor'schen Differentialgleichung. Berücksichtigen wir die isoperimetrische Bedingung nicht, sondern betrachten den Differentialwert von $\int f(s, x, y) \cdot dx$, herrührend von den Verrückungen $n\nu$ und $o\omega$ zweier benachbarten Ordinaten, so lautet derselbe nach Taylor

$$(M + L \cdot q) \cdot dx \cdot n\nu + (M_1 + L_1 \cdot q_1) \cdot dx \cdot o\omega,$$

und nach den strengen Formeln Eulers

$$\{M \cdot dx - d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q]\} n\nu + \{M_1 \cdot dx - d[(H - \int L_1 \cdot dx) \cdot q_1]\} o\omega.$$

Der Taylor'sche Wert ist also falsch, wenn man ihn allgemein anwenden will, um eine Kurve zu finden, auf welcher $\int f \cdot dx$ unter allen möglichen Kurven sein M_a^i erreicht. Denn indem wir $o\omega = 0$ nehmen, müssen wir uns auf die Variation einer Ordinate beschränken, und den Differentialwert $= 0$ setzen. Demnach kommt bei Taylor

$$M + L \cdot q = 0,$$

bei Euler

$$M \cdot dx - d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q] = 0.$$

Letzterer Ausdruck ist der richtige; der Taylor'sche Wert dagegen liefert gar nicht den vollständigen Differentialwert von $\int f \cdot dx$, wenn f noch den Bogen enthält.

Ebenso ist der von Euler früher erhaltene Differentialwert nicht vollständig. Denn er fand

$$n\nu \cdot dx \cdot \left\{ (L \cdot q + M) \cdot e^{\int \frac{L \cdot dq}{L \cdot q + M}} \right\},$$

was als Gleichung ergeben würde wie bei Taylor

$$L \cdot q + M = 0.$$

Dennoch stimmen im isoperimetrischen Problem beide Lösungen überein, wie wir sahen, weil hier der Bogen s als gegeben vorausgesetzt wird, in welchem Falle die Taylor'sche Gleichung richtig ist.

Eine ähnliche Beobachtung läßt sich machen bei der Vergleichung der letzten Lösung Eulers und der Bernoullis. Jacob Bernoulli hatte als Differentialwert der Funktion $\int f(s) \cdot dx$ gefunden

$$(L \cdot dy \cdot ds + 2L \cdot dy \cdot d^2s - L \cdot ds \cdot d^2y) \cdot df + (L \cdot dy \cdot ds + L \cdot ds \cdot d^2y + dL \cdot dy \cdot ds) \cdot dg,$$

wenn zwei benachbarte Ordinaten um unendlich kleine Inkremente vermehrt wurden. Um den Euler'schen Wert damit zu vergleichen, müssen wir $M = N = 0$ nehmen und erhalten

$$-d[H - \int L \cdot dx) \cdot q] \cdot n\nu - d[(H - \int L_1 dx) \cdot q_1] \cdot o\omega.$$

Was bei Jacob Bernoulli df und dg bedeuten, sind bei Euler $n\nu$ und $o\omega$. Nun ist aber entwickelt

$$d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q] \equiv dq \cdot (H - \int L \cdot dx) - q \cdot L \cdot dx,$$

oder da $q = \frac{dy}{ds}$ und

$$dq = \frac{ds \cdot d^2y - dy \cdot d^2s}{ds^2}$$

ist,

$$d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q] \equiv \frac{d^2y \cdot ds - dy \cdot d^2s}{ds^2} \cdot (H - \int L \cdot dx) - \frac{L \cdot dy \cdot dx}{ds}.$$

Das ist jedoch ein völlig anderer Wert, als der, welcher bei Bernoulli in df multipliziert erscheint.

Doch im isoperimetrischen Probleme stimmen dennoch beide Lösungen überein. Euler findet als Gleichung der Kurve, die unter allen isoperimetrischen Kurven $\int f(s) \cdot dx = M_i$ macht, die Gleichung

$$d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q] - a \cdot dq = 0,$$

die ausgeführt lautet

$$dq \cdot (H - \int L \cdot dx) - q \cdot L \cdot dx - a \cdot dq = 0.$$

Differenzieren wir dieselbe und setzen dann

$$H - \int L \cdot dx = \frac{q \cdot L \cdot dx + a \cdot dq}{dq},$$

so kommt

$$q \cdot L \cdot dx \cdot d^2q + a \cdot dq \cdot d^2q - 2L \cdot dq^2 \cdot dx - q \cdot dL \cdot dq \cdot dx - a \cdot d^2q \cdot dq = 0,$$

welche sich reduziert auf

$$q \cdot L \cdot d^2q - 2L \cdot dq^2 - q \cdot dL \cdot dq = 0.$$

Nun ist

$$q = \frac{dy}{ds},$$

und wegen

$$d^2s = \frac{dy \cdot d^2y}{ds},$$

$$dq = \frac{d^2y \cdot dx^2}{ds^3},$$

$$d^2q = \frac{ds^2 \cdot d^3y - 3 \cdot d^2y^2 \cdot dy}{ds^5} \cdot dx^2.$$

Setzen wir diese Werte ein und multiplizieren die ganze Gleichung mit ds^6 , so kommt

$$L \cdot dy \cdot ds^2 \cdot d^3y - 3L \cdot d^2y^2 \cdot dy^2 - 2L \cdot d^2y^2 \cdot dx^2 - dy \cdot dL \cdot d^2y \cdot ds^2 = 0,$$

welche Formel sich wegen

$$dx^2 = ds^2 - dy^2$$

reduziert auf

$$L \cdot dy \cdot ds^2 \cdot d^3y - L \cdot d^2y^2 \cdot dy^2 - 2L \cdot d^2y^2 \cdot ds^2 - dL \cdot dy \cdot d^2y \cdot ds^2 = 0.$$

Damit haben wir die früher gefundene Bernoulli'sche Differentialgleichung vor uns. Wir erkennen hieraus zugleich, daß die Euler'sche Gleichung

$$d[(H - \int L \cdot dx) \cdot q] - a \cdot dq = 0,$$

die ja integriert ergibt

$$[(H - \int L \cdot dx) - a] \cdot dy = b \cdot ds,$$

ein Integral jener Bernoulli'schen Differentialgleichung dritter Ordnung ist.

Zweiter Abschnitt. Einführung des Variations-Kalküls.

Siebentes Kapitel.

Lagrange.

So schön und klar auch die Ableitungen und Resultate in der Euler'schen Schrift sind, so fehlt ihnen doch eine dem Charakter des Differentialkalküls entsprechende Analysis. Denn durch Zerlegung der Integrale in ihre Elemente und durch die Umsetzung der Differentiale in Differenzen von gewissen Gröſsen wird der Mechanismus des Kalküls zerstört, und die Einfachheit, ja selbst die Allgemeinheit der Sätze tritt nicht deutlich hervor. Es mögen sich daraus die langen und schwerfälligen Formeln erklären, welche Euler gebraucht, um seine trotzdem so eleganten und ingeniösen Resultate zu erzielen. Er mochte dies auch selbst erkannt haben, wenn er im zweiten Kapitel, § 39, seines Werkes den Wunsch ausspricht, es möchte eine von der geometrischen Lösung freie Methode erfunden werden, durch die man unmittelbar zu allgemeinen Resultaten gelangt: „desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat, in tali investigatione maximi minimique loco $P. dp$ scribi debere — $p. dP$ “. Und er ahnte nicht, dafs sein Wunsch so bald erfüllt werden würde.

In den *Miscellanea Taurinensia* vom Jahre 1760 und 61 erschien eine Schrift von Lagrange, betitelt: „essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des formules intégrales indéfinies“. Bei genauer Prüfung der Euler'schen Auseinandersetzungen hatte dieser Forscher manche Punkte gefunden, deren Behandlung an Strenge zu wünschen übrig liefs, und die zur praktischen Ausführung auf groſse Schwierigkeiten führten, ja dieselbe oft unmöglich machten. Euler nahm an, das betrachtete Integral hätte feste

Grenzen, und setzte die bei der Integration der Differentialgleichung auftretenden Konstanten als solche fest, die im Problem selbst gegeben waren. Wenn aber mehr Konstante in der Lösung auftraten als Bedingungen zur Bestimmung derselben gegeben waren, so litt das Resultat an einer gewissen Unbestimmtheit. Diesen Fehler zu vermeiden, war das Ziel in den ersten Arbeiten von Lagrange. Dazu aber mußte er mit den bisherigen Prinzipien völlig brechen. Der Schwerpunkt in den Methoden, die Bernoulli, Taylor und Euler zur Lösung gebracht hatten, lag in der punktweisen Variation, nämlich darin, daß die Variation nv der Ordinate betrachtet und nur eine resp. zwei Ordinaten variiert wurden. Statt dessen variiert Lagrange alle Ordinaten der zu suchenden Kurve auf einmal, indem er den Zuwachs jeder Ordinate nicht als eine besondere, numerische GröÙe ansieht, sondern als eine willkürliche, allerdings unendlich kleine Funktion. Hierzu nimmt er die Grenzen des gegebenen Integrals nicht als fest gegeben an, sondern als variable GröÙen, die erst durch die Natur des Problems näher zu bestimmen sind. Damit aber mußte die Verrückung eines Punktes auf der Ordinate fallen gelassen werden, weil ja eine solche Änderung der Kurve nur zwischen festen Grenzen vorgenommen werden durfte. Endlich variierte er nicht, wie früher geschehen war, nur die Ordinate eines Punktes, sondern jede der beiden Ordinaten, um gleichzeitig eine allgemeine Lösung zu erhalten.

So ward Lagrange der Erfinder der Variationsrechnung, die einen der wichtigsten Bestandteile der ganzen Analysis ausmacht. Weil er aber in diesem neuen Kalkül nicht mehr die unabhängige Variable einer Funktion für sich variierte, sondern die ganze Funktionsform selbst änderte, so führte er eine neue Bezeichnung ein: während die Zuwüchse bei Änderung der Variabeln durch das Differentialzeichen d bezeichnet wurden, gab er den Zuwüchsen bei Änderung der Funktionsform das Variationszeichen δ , und erkannte sofort, daß beide Zuwüchse völlig analog seien. Eine Begründung dieser Analogie ist von Lagrange nicht gegeben worden, er benutzt dieselbe vielmehr sofort, um die Differentialgleichungen abzuleiten, welche das Problem lösen.

Ist ein unbestimmter Integralausdruck

$$\int f = M_a^i$$

zu machen, wo f Funktion ist von den unabhängigen Variabeln x, y, z und ihren Differentialen $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \dots$, so muß $\int f$ variiert und die Variation gleich 0 gesetzt werden:

$$\delta \int f = 0.$$

Damit identisch findet er:

$$1) \quad \int \delta f = 0.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \delta f \equiv & n \cdot \delta x + p \cdot \delta dx + q \cdot \delta d^2 x + \dots \\ & + N \cdot \delta y + P \cdot \delta dy + Q \cdot \delta d^2 y + \dots \\ & + \nu \cdot \delta z + \pi \cdot \delta dz + \chi \cdot \delta d^2 z + \dots, \end{aligned}$$

so daß wir nach 1) erhalten

$$\begin{aligned} 2) \quad \int \delta f \equiv & \int n \cdot \delta x + \int p \cdot \delta dx + \int q \cdot \delta d^2 x + \dots \\ & + \int N \cdot \delta y + \int P \cdot \delta dy + \int Q \cdot \delta d^2 y + \dots \\ & + \int \nu \cdot \delta z + \int \pi \cdot \delta dz + \int \chi \cdot \delta d^2 z + \dots = 0. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\delta dx = d\delta x, \quad \delta d^2 x = d^2 \delta x, \dots,$$

ferner bekommen wir durch teilweise Integration

$$\begin{aligned} \int p \cdot \delta dx &= p \cdot \delta x - \int dp \cdot \delta x, \\ \int q \cdot \delta d^2 x &= q \cdot d\delta x - dq \cdot \delta x + \int d^2 q \cdot \delta x, \end{aligned}$$

und ebenso Ausdrücke für $\int P \cdot \delta dy$ und so fort. Substituieren wir diese Werte in 2) und fügen die bei der teilweisen Integration auftretende Konstante K hinzu, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} 3) \quad & \int (n - dp + d^2 q - \dots) \cdot \delta x + \\ & + \int (N - dP + d^2 Q - \dots) \cdot \delta y + \\ & + \int (\nu - d\pi + d^2 \chi - \dots) \cdot \delta z + \\ & + (p - dq + \dots) \cdot \delta x + (q - \dots) \cdot d\delta x + \dots \\ & + (P - dQ + \dots) \cdot \delta y + (Q - \dots) \cdot d\delta y + \dots \\ & + (\pi - d\chi + \dots) \cdot \delta z + (\chi - \dots) \cdot d\delta z + \dots + K = 0, \end{aligned}$$

woraus sich die beiden Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned} 4) \quad & (n - dp + d^2 q - \dots) \cdot \delta x + (N - dP + d^2 Q - \dots) \cdot \delta y + \\ & + (\nu - d\pi + d^2 \chi - \dots) \cdot \delta z = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} M + K \equiv & (p - dq + \dots) \cdot \delta x + (q - \dots) \cdot d\delta x + \dots \\ & + (P - dQ + \dots) \cdot \delta y + (Q - \dots) \cdot d\delta y + \dots \\ & + (\pi - d\chi + \dots) \cdot \delta z + (\chi - \dots) \cdot d\delta z + \dots + K = 0. \end{aligned}$$

Nennen wir den dem Anfangswert von $\int f$ entsprechenden Wert von M M_0 , den dem Endwert zugehörigen M_1 , so folgt

$$M_1 + K - (M_0 + K) = 0,$$

woraus wir die von K freie, für die Integrationsgrenzen gültige Gleichung

$$5) \quad M_1 - M_0 = 0$$

ziehen.

Und um diese Gleichung 5) von den Variationen δx_0 , δy_0 , δx_1 , δy_1 , ... zu befreien, prüft man, ob zwischen ihnen nach der Natur des jedesmaligen Problems eine Beziehung bestehen muß. Nachdem man dadurch die Anzahl dieser

Variationen in 5) nach Möglichkeit verringert hat, setzt man den Koeffizienten jeder Variation $= 0$, und erhält genau so viel Gleichungen, als notwendig sind zur Bestimmung der bei der Integration von 4) auftretenden Konstanten. Sind die Variationen absolut unabhängig von einander, so erhält man zur Bestimmung des M_a^i von $\int f$ die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} n - dp + d^2q - \dots &= 0, \\ N - dP + d^2Q - \dots &= 0, \\ v - d\pi + d^2\chi - \dots &= 0, \end{aligned}$$

von denen eine jede Gleichung eine bloße Folge der beiden andern ist.

Nachdem Lagrange diese Methode an dem Beispiel der Brachistochrone durchgeführt hat, löst er dasselbe Problem für eine Funktion f , die einen Ausdruck Π enthält, wo

$$\Pi \equiv \int f'$$

und f' Funktion von x, y, z und den Differentialen ist. Hier wird

$$\begin{aligned} \delta f \equiv & L \cdot \delta \Pi + n \cdot \delta x + p \cdot d\delta x + q \cdot d^2\delta x + \dots \\ & + N \cdot \delta y + P \cdot d\delta y + Q \cdot d^2\delta y + \dots \\ & + v \cdot \delta z + \pi \cdot d\delta z + \chi \cdot d^2\delta z + \dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta f' \equiv & n' \cdot \delta x + p' \cdot d\delta x + q' \cdot d^2\delta x + \dots \\ & + N' \cdot \delta y + P' \cdot d\delta y + Q' \cdot d^2\delta y + \dots \\ & + v' \cdot \delta z + \pi' \cdot d\delta z + \chi' \cdot d^2\delta z + \dots, \end{aligned}$$

und endlich

$$\delta \Pi = \int \delta f'.$$

Daher ergibt sich als Gleichung des Problems

$$\begin{aligned} 6) \quad \int \delta f \equiv & \int (n \cdot \delta x + p \cdot d\delta x + \dots + N \cdot \delta y + P \cdot d\delta y + \dots \\ & + v \cdot \delta z + \pi \cdot d\delta z + \dots) + \\ & + \int [L \cdot \int (n' \cdot \delta x + p' \cdot d\delta x + \dots + N' \cdot \delta y + P' \cdot d\delta y + \dots \\ & + v' \cdot \delta z + \pi' \cdot d\delta z + \dots)] = 0. \end{aligned}$$

Für das erste Integral kann unmittelbar der in 3) stehende Ausdruck geschrieben werden; das zweite aber transformieren wir durch teilweise Integration in

$$\int L \cdot \int (n \cdot \delta x + p' \cdot d\delta x + \dots) - \int [(n' \cdot \delta x + p' \cdot d\delta x + \dots) \cdot \int L].$$

Nennen wir aber das vollständige Integral

$$\int L \equiv H,$$

so folgt als Wert des zweiten Integrals in 6)

$$\int [(H - \int L) \cdot (n' \cdot \delta x + p' \cdot d\delta x + \dots)],$$

welcher, indem wir ausmultiplizieren und teilweise integrieren, übergeht in

Substituieren wir daher an Stelle des ersten Teiles in 6) den Ausdruck 3), an Stelle des zweiten die Formel 7), nehmen die zusammengehörigen Glieder zusammen und setzen zur Abkürzung

so resultiert aus $\int \delta f = 0$ die Gleichung

die ebenso, wie Gleichung 3), zu behandeln ist.

Von Zeitgenossen ward die neue Methode bald angefeindet, und Lagrange beklagt sich in einer Schrift: „Sur la méthode des variations“ *) besonders über den Geometer Fontaine, der in den Mémoires de l'Académie française vom Jahre 1767 einen Aufsatz veröffentlicht hatte, unter dem Titel: „Addition à la méthode pour la solution des Problèmes de maximis et minimis“. Derselbe giebt den neuen Weg, den Lagrange eingeschlagen hat, geradezu als falsch an und liefert selbst zwei andere Methoden, die er neuer und vorzüglicher denn alle bisherigen nennt. Sehr bald aber erkennt man, daß die eine Methode sehr wenig von der verschieden ist, die Euler in seinem Methodus gegeben, während die andere der des Lagrange gleicht.

*) *Miscell. taurin.*, t.IV vom Jahre 1766—69.

*) Borda, éclaircissement sur les méthodes.....

erhaltenen Resultate, soweit sie sich auf die Variabilität der Grenzen bezogen, unrichtig wären, und er brachte in den *Mémoires de l'Académie* vom Jahre 1767 eine neue Methode, die aber durchaus nicht zur glücklichen Lösung des Problems beitrug. Lagrange versuchte selbst eine Zurückweisung des Borda'schen Vorwurfs, aber er kam damals nicht zum Ziele. Erst Euler brachte Klarheit in die Untersuchung. Zwei andere Zeitgenossen, Le Seur und Jacquier sammelten in ihrem Buche, „*Traité de calcul intégral*“ die hauptsächlichsten relativen Methoden und vergaßen auch die des neuen Variationskalküls im zweiten Bande des Werkes nicht. Aber man muß wännen, daß sie sich selbst die Erfindung oder wenigstens die Bearbeitung dieser Methode zuschreiben wollten, da sie nirgends des Essai von Lagrange Erwähnung thun, wie wol sie daraus abschreiben. —

Nachdem so die Lösung erhalten worden war, welche einem gegebenen Integral $\int f$ seinen größten oder kleinsten Wert erreichen liefs, tauchte die Frage auf, wie man entscheiden könnte, ob die Lösung einem Ma oder einem Mi zugehörte. Damit hat sich Lagrange in seiner „*Théorie des fonctions analytiques*“ beschäftigt, die im Jahre 1797 erschien.

Er betrachtet zunächst das allgemeine Problem der Variationsrechnung

$$\int f(x, y, y', y'', \dots) = M_a^i,$$

wo $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt wird, und findet als Lösung des Problems die Differentialgleichung

$$f'y - \frac{df'y'}{dx} + \frac{d^2f'y''}{dx^2} - \dots = 0.$$

Das Verhalten der zweiten Variation von $\int f$ in Bezug auf das Vorzeichen liefert das Kriterium des M_a^i ; und daß zur Erkenntnis desselben eine Transformation dieser zweiten Variation nötig sei, das hat Lagrange zuerst betont gegenüber Legendre, der schon in der Überzeugung von der Möglichkeit dieser Transformation die Frage absolviert glaubte. Indessen im Allgemeinen konnte auch er die Transformation nicht durchführen. Er behandelt nur den Fall, in welchem die Funktion f den ersten Differentialquotienten y' enthält.

Ist

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') = M_a^i,$$

so kommt als Differentialgleichung des Problems

$$9) \quad f'y - \frac{df'y'}{dx} = 0,$$

und die zweite Variation lautet

$$10) \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{1}{2} f''_{yy} \cdot \delta y^2 + f''_{yy'} \cdot \delta y \cdot \delta y' + \frac{1}{2} f''_{y'y'} \cdot \delta y'^2 \right\} \cdot dx.$$

Ist dieselbe negativ für jeden beliebigen Wert von δy und $\delta y'$, so ist V ein Ma für den Wert von y , welcher der Gleichung 9) genügt; ist sie positiv, so ist V ein Mi.

Um das Vorzeichen zu entscheiden, führt Lagrange eine neue Funktion λ von x ein und transformiert dann 10) in die Form

$$\left[\lambda \cdot \delta y^2 \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(\frac{1}{2} f''_{yy} - \frac{d\lambda}{dx} \right) \cdot \delta y^2 + (f''_{yy'} - 2\lambda) \cdot \delta y \cdot \delta y' + \frac{1}{2} f''_{y'y'} \cdot \delta y'^2 \right\} \cdot dx,$$

welche mit 10) äquivalent ist, — wie wir sehen, wenn wir $\lambda \cdot \delta y^2$ differenzieren und mit unter das Integralzeichen aufnehmen. Nun bestimmen wir λ so, daß

$$(f''_{yy'} - 2\lambda)^2 = \left(\frac{1}{2} f''_{yy} - \frac{d\lambda}{dx} \right) \cdot f''_{y'y'}$$

ist. Dann wird der Ausdruck unter dem Integral ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2} f''_{y'y'} \cdot (\delta y' + A \cdot \delta y)^2 \cdot dx,$$

worin ist $A \cdot f''_{y'y'} = f''_{yy'} - 2\lambda$.

Wir erhalten daher, wenn wir durch die Indices 0 und 1 die respektiven Werte für x_0 , x_1 bezeichnen,

$$\lambda_1 \cdot \delta y_1^2 - \lambda_0 \cdot \delta y_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \int_{x_0}^x f''_{y'y'} \cdot (\delta y' + A \cdot \delta y)^2 \cdot dx.$$

Nehmen wir an, die Variationen von y_1 und y_0 verschwinden, dann bleibt

$$11) \frac{1}{2} \cdot \int_{x_0}^{x_1} f''_{y'y'} \cdot (\delta y' + A \cdot \delta y)^2 \cdot dx,$$

woraus folgt, daß V ein Mi oder Ma wird, je nachdem $f''_{y'y'} > \text{oder} < 0$

ausfällt. —

Im Jahre 1806 veröffentlichte Lagrange sein berühmtes Werk „Leçons sur le calcul des fonctions“. Hier fand die neue Theorie des M_i und die Variationsrechnung auch ihren Platz, indem mittelst der neuen Regeln, welche die Funktionentheorie geschaffen hatte, die altbekannten Lösungen abermals abgeleitet wurden.

Betrachten wir eine gegebene Funktion $V(x, y, y', y'', \dots)$, und nehmen wir an, daß eine gewisse Funktion U , die das Integral von V darstellt, zu einem M_a^i gemacht werde, und daß

$$y = \varphi(x)$$

die Lösung des Problems sei: so ist notwendig, daß bei kleiner Änderung von $\varphi(x)$ der Wert von U im Falle des M_a abnehme, im Falle des M_i zunehme. Setzen wir nun

$$y = \varphi(x, i),$$

wo durch i die kleine Änderung der Funktion $\varphi(x)$ bezeichnet wird, doch so, daß $y = \varphi(x)$ ist für $i = 0$, tragen diesen Wert in U ein und entwickeln dann U nach der Maclaurin'schen Reihe, so kommt als Zuwachs von U

$$12) \quad i \cdot \left(\frac{dU}{di} \right) + \frac{i^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2U}{di^2} \right) + \dots,$$

wo nach Ausführung der Differentiationen allemal $i = 0$ gesetzt werden soll, was durch Einschließen in (...) markiert sein mag. Die Summe 12) muß negativ sein für das M_a , positiv für das M_i , wenn i eine willkürliche, sehr kleine, von x unabhängige GröÙe darstellt. Hier dominiert aber das erste Glied über die andern, und dieses ändert sein Zeichen mit der GröÙe

i : darum kann $i \cdot \left(\frac{dU}{di} \right)$ nicht konstant positiv oder negativ sein, es müÙte denn verschwinden. Wir erhalten daher die Bedingung

$$\left(\frac{dU}{di} \right) \equiv U' = 0,$$

während das Vorzeichen von $U'' \equiv \left(\frac{d^2U}{di^2} \right)$ die Entscheidung über das M_a^i abgibt, da i^2 eine stets positive GröÙe ist.

Nun ist in unserm Falle aber nicht U , mithin auch nicht $\varphi(x)$ bekannt, sondern V ist gegeben. Deshalb sind die Abgeleiteten U' , U'' für die Funktion V zu bilden.

Sei wieder $y = \varphi(x, i)$, so giebt die Maclaurin'sche Entwicklung

$$y + i \cdot \left(\frac{dy}{di} \right) + \frac{i^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2y}{di^2} \right) + \dots$$

Ebenso

$$y' + i \cdot \left(\frac{dy'}{di} \right) + \frac{i^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2y'}{di^2} \right) + \dots,$$

$$y'' + i \cdot \left(\frac{dy''}{di} \right) + \frac{i^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2y''}{di^2} \right) + \dots$$

etc. etc.

Machen wir diese Substitutionen in der Funktion V und

entwickeln nach Potenzen von i , so erhalten wir

$$V + i \cdot \left(\frac{dV}{di} \right) + \frac{i^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2V}{di^2} \right) + \dots$$

Bezeichnet U das Integral von V , so sind auch $\left(\frac{dU}{di} \right)$, $\left(\frac{d^2U}{di^2} \right)$, ... die Integrale von $\left(\frac{dV}{di} \right)$, $\left(\frac{d^2V}{di^2} \right)$, ..., und wir haben

$$\left(\frac{dU}{di} \right)' = \left(\frac{dV}{di} \right); \quad \left(\frac{d^2U}{di^2} \right)' = \left(\frac{d^2V}{di^2} \right), \dots$$

Bilden wir $\left(\frac{dV}{di} \right)$, so dürfen wir setzen

$$(13) \quad \left(\frac{dV}{di} \right) \equiv M \cdot \left(\frac{dy}{di} \right) + P \cdot \left(\frac{dy'}{di} \right) + Q \cdot \left(\frac{dy''}{di^2} \right) + \dots$$

oder infolge der Transformation

$$P \cdot \left(\frac{dy'}{di} \right) = \left(P \cdot \frac{dy}{di} \right)' - P' \cdot \left(\frac{dy}{di} \right),$$

$$Q \cdot \left(\frac{dy''}{di^2} \right) = \left(Q \cdot \frac{dy'}{di} \right)' - \left(Q' \cdot \frac{dy}{di} \right)' + Q'' \cdot \left(\frac{dy}{di} \right)$$

etc. etc.

$$\left(\frac{dV}{di} \right) = \left[M - P' + Q'' - \dots \right] \cdot \left(\frac{dy}{di} \right) +$$

$$+ \left(P \cdot \frac{dy}{di} \right)' - \left(Q' \cdot \frac{dy}{di} \right)' + \dots$$

$$+ \left(Q \cdot \frac{dy'}{di} \right)' - \dots$$

$$+ \dots \dots \dots$$

Da nach der M_a -bedingung

$$\left(\frac{dV}{di} \right) = 0$$

werden muß und $\left(\frac{dy}{di} \right) \equiv \left(\frac{d\varphi}{di} \right)$ unbestimmt bleibt, folgt

$$14) \quad M - P' + Q'' - \dots = 0,$$

welche Differentialgleichung von der Ordnung $2n$ ist, wenn $y^{(n)}$ der höchste darin vorkommende Differentialquotient ist; ihr Integral enthält daher $2n$ willkürliche Konstanten.

Nach der Bedingung 14) hat man für das Integral von $\left(\frac{dV}{di} \right)$

$$\left(\frac{dU}{di} \right) \equiv \left[P - Q' + \dots \right] \cdot \left(\frac{dy}{di} \right) +$$

$$+ \left[Q - \dots \right] \cdot \left(\frac{dy'}{di} \right) +$$

$$+ \dots \dots \dots + K = 0.$$

Damit aber dieser bestimmte Wert der Funktion U zwischen den Integrationsgrenzen verschwinde, muß die Differenz der Werte, welche diesen Grenzen entsprechen, Null sein. Nennen

wir diese Grenzwerte $\left(\frac{dU}{di}\right)_0$ und $\left(\frac{dU}{di}\right)_1$, so kommt

$$\left(\frac{dU}{di}\right)_1 - \left(\frac{dU}{di}\right)_0 = 0,$$

und damit sind wir wieder zu dem früheren Resultate gelangt.

Lagrange giebt dann im Anschluß daran die Bedingungen an, welche die vorigen Formeln erleiden, falls die Integrationsgrenzen variabel sind. Er vermehrt x um $i \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)$

und erhält als Entwicklung von $\left(\frac{dV}{di}\right)$

$$15) \left(\frac{dV}{di}\right) = M \cdot \left[\left(\frac{dy}{di}\right) - y' \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)\right] + P \cdot \left[\left(\frac{dy}{di}\right) - y' \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)\right]' + \\ + Q \cdot \left[\left(\frac{dy}{di}\right) - y' \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)\right]'' + \dots + \left(V \cdot \frac{dx}{di}\right)'.$$

Ist nämlich wieder

$$y = \varphi(x, i),$$

so giebt die Entwicklung

$$y + i \cdot \left(\frac{dy}{di}\right) + \frac{i^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2y}{di^2}\right) + \dots;$$

da nun aber x in $x + i \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)$ übergeht, erhalten wir für y

$$y + i \cdot \left(\frac{dx}{di}\right) \cdot y' + \frac{i^2 \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)^2}{2} \cdot y'' + \dots$$

Ebenso für $\left(\frac{dy}{di}\right)$

$$\left(\frac{dy}{di}\right) + i \cdot \left(\frac{dx}{di}\right) \cdot \left(\frac{dy}{di}\right)' + \frac{i^2 \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{dy}{di}\right)'' + \dots,$$

und für $\left(\frac{d^2y}{di^2}\right)$

$$\left(\frac{d^2y}{di^2}\right) + i \cdot \left(\frac{dx}{di}\right) \cdot \left(\frac{d^2y}{di^2}\right)' + \frac{i^2 \cdot \left(\frac{dx}{di}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2y}{di^2}\right)'' + \dots$$

Darum lautet die vollständige Vermehrung von y

$$i. \left[\left(\frac{dy}{di} \right) + \left(\frac{dx}{di} \right) \cdot y' \right] + \frac{i^2}{2} \left[\left(\frac{d^2y}{di^2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{dx}{di} \right) \cdot \left(\frac{dy}{di} \right)' + \left(\frac{dx}{di} \right)^2 \cdot \left(\frac{dy}{di} \right)'' \right] + \dots$$

Bezeichnen wir für einen Moment

$$\left(\frac{dy}{di} \right) + \left(\frac{dx}{di} \right) \cdot y' = \left[\frac{dy}{di} \right],$$

also $\left(\frac{dy}{di} \right) = \left[\frac{dy}{di} \right] - \left(\frac{dx}{di} \right) \cdot y',$

und nehmen die Abgeleiteten nach x

$$\left(\frac{dy}{di} \right)' = \left\{ \left[\frac{dy}{di} \right] - \left(\frac{dx}{di} \right) \cdot y' \right\}'$$

$$\left(\frac{dy}{di} \right)'' = \left\{ \left[\frac{dy}{di} \right] - \left(\frac{dx}{di} \right) \cdot y' \right\}''$$

etc. etc.,

so haben wir diese Werte in Formel 13) zu substituieren und erhalten das Resultat 15).

Wir wenden hierauf die bekannte Transformation an und erhalten wieder die allgemeine Gleichung 14). Die Variation von x hat nur Einfluss auf die Grenzgleichung

$$\left(\frac{dU}{di} \right)_1 - \left(\frac{dU}{di} \right)_0 = 0,$$

wo man dem Werte von $\left(\frac{dU}{di} \right)$ noch das Glied $V \cdot \left(\frac{dx}{di} \right)$ hinzuzufügen und $\left(\frac{dy}{di} \right)$ mit $\left(\frac{dy}{di} \right) - y' \cdot \left(\frac{dx}{di} \right)$ zu vertauschen hat.

Endlich entwickelt Lagrange den Fall, daß V außer y eine andre abhängige Variable z enthält, und giebt die Anleitung, wie zu verfahren ist, wenn für eine Funktion von zwei unabhängigen Variabeln, also für ein Doppelintegral das M_a^i gesucht wird. —

Es scheint fast, als ob ich in dem Vorhergehenden die mir gestellte Aufgabe, das isoperimetrische Problem in seiner historischen Entwicklung zu verfolgen, verlassen hätte. Denn bisher war nur von der Lösung des Problems eines absoluten M_a^i die Rede. Indessen Lagrange hatte mit der Lösung des absoluten Problems gleichzeitig die des relativen und isoperimetrischen gegeben, indem er beide auf den eben behandelten Fall zurückführte. Die Art der Zurückführung befindet sich in dem bekannten Werke: „Mécanique analytique“ in Sektion IV des ersten Teiles.

Es sei nämlich f eine Funktion von einer Anzahl Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ von x und deren ersten Differentialquotienten, man sucht diejenigen

n Größen $y_1, \dots, y_n$, welche $V \equiv \int_{x_0}^{x_1} f \cdot dx = M_a^i$ machen,

wenn dieselben $\nu < n$ gegebenen Bedingungsgleichungen unterworfen sind

$$a) \quad f_k(x_1, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0; \quad k = 1, 2, \dots, \nu.$$

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir aus den $\nu + 1$ Gleichungen $\delta f = 0, \delta f_1 = 0, \dots, \delta f_\nu = 0$

ν der δy eliminieren. Dies geschieht durch Einführung von ν neuen Größen, den ν Multiplikatoren λ . Setzt man nämlich mit Lagrange

$$\Omega \equiv f + \sum_1^\nu \lambda_k \cdot f_k,$$

wo $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ neue, noch zu bestimmende Funktionen von x sind, so findet sich, daß die Lösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$ des absoluten Problems

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega \cdot dx = M_a^i$$

zugleich Lösungen des relativen Problems sind. Wir erhalten die Lösung, indem wir

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \Omega \cdot dx = 0$$

nehmen. Wird aber $\delta \Omega$ gebildet, so ergibt sich nach demselben Verfahren, wie oben beim absoluten Problem, mit einer Funktion Ω

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \delta \Omega &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \sum_1^n \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \right) \cdot \delta y_i \cdot dx + \\ &+ \left[\Omega \cdot \delta x + \sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \cdot \delta y_i \right]_{x_0}^{x_1} = 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Differentialgleichungen des Problems

$$b) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

und die Grenzüngleichung zur Bestimmung der auftretenden

Integrationskonstanten

$$c) \quad \left[\Omega \cdot \delta x + \sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \cdot \delta y_i \right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

ableiten lassen. Die n Gleichungen b), verbunden mit den ν Gleichungen a) reichen aus, um die $n + \nu$ Unbekannten $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ zu bestimmen.

Von dem soeben behandelten Fall ist nun das isoperimetrische Problem ein spezieller Teil. In der allgemeinsten analytischen Form ausgesprochen lautet dasselbe*): „Unter allen Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ von x , für welche die ν Relationen gegeben sind

$$\int_{x_0}^{x_1} f_k \cdot dx = l_k; \quad k = 1, 2, \dots, \nu,$$

diejenigen zu finden, für welche

$$\int_{x_0}^{x_1} f \cdot dx = M_a^i$$

wird, wobei $f, f_1, \dots, f_\nu$ gegebene Funktionen von $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ und deren ersten Differentialquotienten sind.“ Setzen wir darin alle

$$f_k = \frac{du_k}{dx},$$

so brauchen wir $n + \nu$ Funktionen $y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_\nu$ zu bestimmen, zwischen denen die ν Bedingungsgleichungen

$$f_k - \frac{du_k}{dx} = 0, \quad k = 1, \dots, \nu$$

bestehen, damit eine gegebene Funktion $\int_{x_0}^{x_1} f \cdot dx = M_a^i$ werde;

wobei überdies noch den Funktionen $u_1, u_2, \dots, u_\nu$ die ν Grenzbedingungen auferlegt werden

$$[u_k]_1 - [u_k]_0 = l_k.$$

Das ist aber eine Aufgabe des relativen Problems. Wir setzen

$$\Omega \equiv f + \sum_1^\nu \lambda_k \cdot \left(f_k - \frac{du_k}{dx} \right)$$

und bilden damit die Gleichungen b) und c). Aus b) er-

*) Ad. Mayer, Vorlesungen über Variationsrechnung; Leipzig 1885/86.

halten wir die n Gleichungen

$$d) \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_1^{\nu} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \frac{dy_i}{dx}} + \sum_1^{\nu} \lambda_k \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \right) = 0,$$

und die ν weiteren

$$e) \quad -\frac{d\lambda_k}{dx} = 0.$$

Aus den ν letzteren aber folgen für die unbestimmten Multiplikatoren die konstanten Werte

$$\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = a_2, \dots, \lambda_{\nu} = a_{\nu}.$$

Damit ward auf das Glänzendste jene Regel bestätigt, die seiner Zeit Euler für das isoperimetrische Problem aufgestellt hatte.

Was das Gesamtergebn der Lagrange'schen Methode betrifft, so ist dasselbe allgemeiner als das bisher von Euler erhaltene Resultat. Denn waren hier die Grenzen, zwischen denen variiert wurde, festbestimmt, so steht dort die Bestimmung von Anfang und Ende noch aus. Nehmen wir an,

daß die Grenzwerte von $y, \frac{dy}{dx}, \dots$ gegeben seien, so sind

ihre Variationen natürlich Null, es fällt die Gleichung 5) weg, und es bleibt zur Bestimmung von y die Differentialgleichung 4) übrig, die völlig mit der von Euler erhaltenen übereinstimmt.

Es bietet auch keine weiteren Schwierigkeiten, mit Hilfe der allgemeinen Variationsmethode die früheren speziellen, isoperimetrischen Aufgaben zu lösen. Wählen wir z. B. das Taylor'sche Problem: „Man soll unter allen Kurven derselben Länge

die suchen, welche $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, s) = M_a$ macht“, so haben wir nach der Euler'schen Regel die erste Variation des Ausdruckes

$$\int_{x_0}^{x_1} (f + a \cdot \sqrt{1 + y'^2}) \cdot dx$$

= 0 zu setzen. Führen wir wieder ein

$$q = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

so ist in unsrer Gleichung 8) zu setzen

$$(n) = 0, (p) = 0, \dots$$

$(N) = M, (P) = a \cdot q + q \cdot (H - \int L \cdot dx), (Q) = 0, \dots$, wenn wir festsetzen

$$df = L \cdot ds + M \cdot dy + N \cdot dx.$$

Dann geht 8) über in

$$M - \frac{d}{dx} \{ a \cdot q + q \cdot (H - \int L \cdot dx) \} = 0,$$

$$\text{oder in } M \cdot dx - d \{ q \cdot (H - \int L \cdot dx) \} - a \cdot dq = 0,$$

welches dieselbe Gleichung ist, wie Nr. 7, pag. 51, die wir schon auf die Taylor'sche Form gebracht haben. Die Grenzgleichung aber lautet

$$\left[\{ a \cdot q + q \cdot (H - \int L \cdot dx) \} \cdot \delta y \right]_{x_0}^{x_1} = 0;$$

sie bestimmt die Konstanten, die sich bei Integration der Differentialgleichung eingestellt haben. Sie wird identisch befriedigt, wenn beide Grenzen gegeben sind; und dann ergeben sich die Konstanten daraus, daß die erhaltene Kurvengleichung für x_0, y_0 und x_1, y_1 bestehen muß. Ist etwa x_0, y_0 gegeben, so ist $\delta x_0 = 0$ und $\delta y_0 = 0$, aber $\delta x_1, \delta y_1$ sind willkürlich. Es folgt dann zur Berechnung der Konstanten außer der für x_0, y_0 giltigen Kurvengleichung die weitere

$$\left[a \cdot q + q \cdot (H - \int dx) \right]_{x_1} = 0.$$

Achtes Kapitel.

Die Schriften Euler's über Variationsrechnung.

Euler hatte die analytische Lösung des isoperimetrischen Problems von Lagrange bereits im Jahre 1755 erhalten, und die Wichtigkeit der Sache reizte ihn, selbst, durch die Lagrange'sche Methode unterstützt, eine analytische Lösung zu suchen. Aus einem Briefe an Lagrange vom 2. Oktober 1759 geht hervor, daß er in diesem Jahre schon die Lösung gefunden hatte, jedoch dieselbe noch für sich zu behalten beschloß, bis Lagrange seine Entdeckungen veröffentlicht hatte, um diesem Manne nicht den Ruhm der Erfindung zu nehmen. 1762 erschien der Essai von Lagrange, und 1766 gab Euler seine Untersuchungen heraus im 10. Band der Comm. Acad. Petrop. novi. Es sind die beiden Schriften: „Elementa calculi variationum“ und „Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum“.

Ist $y = f(x)$, so lehrt die Differentialrechnung, wie man durch Vermehrung der Variablen x um dx den Zuwachs dy der Funktion y finden kann, oder geometrisch gesprochen: wie man aus dem Zuwachs der Abscisse den der Ordinate einer Kurve erhalten kann. Man hat dabei immer nur eine bestimmte Kurve im Auge, deren Gleichung $y = f(x)$ lautet.

Ist aber unter einer allgemeinen Gleichung eine ganze Schaar von Kurven zusammengefaßt, so kann y nicht allein von der Abscisse x , sondern muß noch von einem Parameter t abhängen; und Probleme, in denen man aus jener Schaar von Kurven eine bestimmte auswählen soll, werden durch Differentiation nach diesem Parameter gelöst, da ja die Variabilität des Parameters alle jene Kurven umfaßt. Ein solcher Parameter ist z. B. die bei der Integration eines Ausdruckes auftretende Konstante. Es habe etwa $\int f \cdot dx$ eine Gleichung zwischen x , y und der willkürlichen Konstanten a ergeben: dann wird man nach der Veränderung von $\int f \cdot dx$ fragen können, wenn man a um da vermehrt. Man sieht daher, daß es sich bei solchen Aufgaben darum handelt, besondere Regeln für das Auffinden derjenigen Differentiale aufzustellen, welche aus der Variabilität eines Parameters entstehen. Und zum Unterschiede vom gewöhnlichen Differentialkalkül nennt Euler diesen Zweig der Analysis Variationskalkül.

Das Gebiet jedoch der Anwendung dieses Kalküls erstreckt sich weiter, als auf die Auffindung von Kurven, die durch die Variabilität von Parametern erzeugt werden: es dehnt sich auch aus über alle Kurven, die eine M_a^i -eigenschaft besitzen. Und solche Probleme führen auf die Bestimmung einer Gleichung zwischen 2 Unbekannten x und y , welche bewirkt, daß ein Ausdruck $\int f \cdot dx$ seinen größten oder kleinsten Wert erreicht. Dazu muß die Änderung von $\int f \cdot dx$ gesucht werden, wenn die zwischen x und y bestehende Beziehung unendlich wenig geändert wird, wobei übrigens f außer x und y und deren Differentialen auch Integrale enthalten kann.

Und nun leitet Euler aus den ersten Gesetzen der Analysis die Elemente des Variationskalküls ab. Es wird das Zeichen δ eingeführt und bewiesen, daß

$$\delta dy = d\delta y, \delta d^2y = d^2\delta y, \dots,$$

und daß, wenn V eine variable GröÙe bezeichnet, ebenso

$$\delta dV = d\delta V, \delta d^2V = d^2\delta V, \dots$$

ist.

Drückt V eine gegebene Funktion von x , y , p , q , ... aus, wo

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$$

gesetzt ist, so muß die Variation von V bestimmt werden, wenn wir die Änderung von V suchen. Wir setzen an Stelle von y $y + \delta y$ und erhalten somit zunächst

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx}, \quad \delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \dots$$

Machen wir dieselbe Substitution in V , so geht V über in $V + \delta V$, und wir erhalten

$$\delta V = M \cdot \delta y + P \cdot \frac{d\delta y}{dx} + Q \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \dots$$

Wir haben nun die nähere Bestimmung

$$V \equiv \int f \cdot dx,$$

dann ist

$$\delta V \equiv \delta \int f \cdot dx = \int \delta f \cdot dx.$$

Sei f Funktion von $x, y, p, q, \dots$, so ist hiernach

$$\delta \int f \cdot dx \equiv \int [M \cdot \delta y + P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + \dots] \cdot dx.$$

Suchen wir aber den Wert y von x , der $V = M_i$ macht, so muß die erste Variation V verschwinden, also

$$\delta \int f \cdot dx = 0$$

werden.

Euler führt nun in derselben Weise, wie es bei Lagrange auseinandergesetzt wurde, durch partielle Integration die Gleichung

$$\delta V = 0$$

zurück auf einen integrierten und auf einen noch zu integrierenden Teil, und zieht dieselben Folgerungen.

Am Ende der ersten Schrift geht dann Euler auch auf das isoperimetrische Problem ein. Er entkleidet dasselbe jetzt seiner bisherigen geometrischen Gestalt und giebt ihm die folgende Form:

„Unter allen Relationen, in denen eine Funktion y durch x definiert wird, und welche die Eigenschaft gemeinsam haben, daß für sie der Ausdruck V , zwischen $x = x_0$ und $x = x_1$ genommen, denselben Wert behält, diejenige zu finden, durch welche ein Ausdruck U zwischen den gleichen Grenzen seinen größten oder kleinsten Wert erreicht“.

Daß die Lösung dieses Problems auf die eines absoluten zurückkommt, ward auch hier wiederum von Euler bewiesen. Soll nämlich $U = M_i$ sein, so muß

$$\delta U = 0$$

werden, welches auch der Wert δy sein mag. Bildet man nun δU , so erhält man jenen bekannten, teils integrierten, teils nicht integrierten Ausdruck. Wir wollen setzen mit Euler

$$\delta U \equiv \int_{x_0}^{x_1} (A) \cdot dx \cdot \delta y + \left[(B) \delta y + (C) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (D) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \dots \right]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Hier enthält nur das erste Glied noch die Variation δy , während die übrigen Glieder bloß von der Variation des ersten

und letzten Wertes von y abhängen. Nennen wir die auf y folgenden Ordinaten $y', y'', \dots$, wodurch die Funktion (A) übergeht in $(A'), (A''), \dots$, und bezeichnen der Kürze halber

$$(I) \equiv \left[(B) \cdot \delta y + (C) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \dots \right]_{x_0}^{x_1},$$

so wird

$$\delta U \equiv (A) \cdot dx \cdot \delta y + (A') \cdot dx \cdot \delta y' + (A'') \cdot dx \cdot \delta y'' + \dots + (I).$$

Die aufeinanderfolgenden Variationen $\delta y, \delta y', \delta y'', \dots$, sind von einander unabhängig, woraus folgt

$$(A) = 0, (A') = 0, (A'') = 0, \dots,$$

welche Gleichungen sämtlich in der einen enthalten sind

$$(A) = 0.$$

Die Lösung des absoluten Problems kommt also darauf zurück, daß man eine solche Relation zwischen x und y sucht, daß

$$(A) = 0$$

werde; dann muß auch

$$(I) = 0$$

sein, und diese Gleichung, in der nur die Grenzwerte der Variationen vorkommen, dient dazu, die Konstanten zu bestimmen, die bei der Integration der Differentialgleichung $(A) = 0$ aufgetreten sind.

Ist nun der gesuchten Funktion y von x die isoperimetrische Bedingung

$$V \equiv \int_{x_0}^{x_1} \varphi \cdot dx = \text{const.}$$

vorgeschrieben, so muß außer $\delta U = 0$ auch

$$\delta V \equiv \int_{x_0}^{x_1} (\mathcal{A}) \cdot dx \cdot \delta y + \left[(B) \cdot \delta y + (C) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (\mathcal{A}) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \dots \right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

sein. Dann ergeben sich die beiden Bedingungen

$$(A) \cdot \delta y + (A') \cdot \delta y' + (A'') \cdot \delta y'' + \dots = 0,$$

$$(\mathcal{A}) \cdot \delta y + (\mathcal{A}') \cdot \delta y' + (\mathcal{A}'') \cdot \delta y'' + \dots = 0,$$

worin die Accente dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Aus beiden Gleichungen läßt sich eine der Größen $\delta y, \delta y', \delta y'', \dots$ eliminieren; da aber in der dann resultierenden Gleichung die Variationen unabhängig von einander sind, müssen ihre Koeffizienten einzeln verschwinden, und wir erhalten

$$(A) = n \cdot (\mathcal{A}); (A') = n \cdot (\mathcal{A}'), \dots,$$

oder

$$(A) + a.(A) = 0$$

als Gleichung zur Bestimmung von y . Ebenso haben wir an Stelle von $(I) = 0$ zu setzen

$$(I) + a.(I) = 0,$$

wenn (I) der integrierte Teil von δV ist. Dieselben Gleichungen indessen stellen sich ein, wenn wir das absolute Problem

$$U + a.V = M_a^i$$

betrachten.

Ähnlich verhält es sich, wenn mehrere Bedingungen V vorliegen. Man multipliziert die Ausdrücke V mit Konstanten, addiert sie zu U und löst das absolute Problem

$$U + a.V_1 + b.V_2 + \dots = M_a^i.$$

Die meiste Schwierigkeit in der neuen Lösung des Problems machte die Betrachtung der variablen Integrationsgrenzen. Wir sahen schon, wie sich Borda abgemüht hatte, den Fehler in der Lagrange'schen Ableitung zu verbessern, und bemerkten, daß ihm dies nicht gelungen war. Nun griff Euler diese Frage auf, wobei er eine neue Behandlungsart des Variationskalküls einführte. Er verfiel allerdings hierbei in einen andern Fehler, indem er den ursprünglichen umging, aber dennoch ist durch diese Arbeit Klarheit in den ganzen Sachverhalt gekommen. Ich meine die Abhandlung, welche am Ende des dritten Theiles der im Jahre 1770 erschienenen „Institutiones calculi integralis“ steht. Euler geht ebenso wie Lagrange von der falschen Annahme aus, daß außer x auch dx variabel sei: dadurch aber, daß er am Schlusse eine glückliche Substitution einführt, erhält er ein Resultat, welches, wenn man in ihm $dx = \text{const.}$ deutet, das richtige ist.

Unter der Voraussetzung nämlich, daß dx variabel sei, findet er

$$\begin{aligned}\delta p &= \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx \cdot d\delta y - dy \cdot d\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta y - p \cdot d\delta x}{dx}, \\ \delta q &= \delta \frac{dp}{dx} = \frac{d\delta p - q \cdot d\delta x}{dx}, \\ &\text{etc. etc.}\end{aligned}$$

Ist nun $V \equiv \int f \cdot dx$ die Gröfse, deren erste Variation zu berechnen ist, so wird wegen der Variabilität von x und dx

$$\int \delta(f \cdot dx) = \int (\delta f \cdot dx + f \cdot d\delta x),$$

oder

$$a) \quad \int \delta(f \cdot dx) = f \cdot \delta x + \int \delta f \cdot dx - \int df \cdot \delta x.$$

Wenn f als Funktion von $x, y, p, q, \dots$ vorausgesetzt wird, so ist nach a)

$$\int \delta(f \cdot dx) = f \cdot \delta x + \int dx \cdot (N \cdot \delta x + M \cdot \delta y + P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + \dots) - \int \delta x \cdot (N \cdot dx + M \cdot dy + P \cdot dp + \dots).$$

Führen wir die Integration der Summen aus, so kommt

$$\int \delta(f \cdot dx) = f \cdot \delta x + \int M \cdot (dx \cdot \delta y - \delta x \cdot dy) + \int P \cdot (dx \cdot \delta p - \delta x \cdot dp) + \int Q \cdot (dx \cdot \delta q - \delta x \cdot dq) + \dots$$

Setzen wir hier die oben gefundenen Werte für $\delta p, \delta q, \dots$ ein, dann geht die Variation über in

$$\int \delta(f \cdot dx) = f \cdot \delta x + \int M \cdot dx \cdot (\delta y - p \cdot \delta x) + \int P \cdot d(\delta y - p \cdot \delta x) + \int Q \cdot d(\delta p - q \cdot \delta x) + \dots$$

Substituieren wir nun

$$\omega \equiv \delta y - p \cdot \delta x,$$

so wird

$$\frac{1}{dx} \cdot d\omega \equiv \delta p - q \cdot \delta x; \quad \frac{1}{dx} \cdot d \frac{d\omega}{dx} \equiv \delta q - r \cdot \delta x; \dots,$$

woraus für die erste Variation folgt

$$\int \delta(f \cdot dx) \equiv f \cdot \delta x + \int M \cdot \omega \cdot dx + \int P \cdot d\omega + \int Q \cdot d \frac{d\omega}{dx} + \int R \cdot d \left(\frac{d \frac{d\omega}{dx}}{dx} \right) + \dots$$

Wird die Integration teilweise ausgeführt, so resultiert schließlich die Formel

$$\int \delta(f \cdot dx) = \int \omega \cdot dx \cdot \left(M - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d \frac{dQ}{dx} - \dots \right) + f \cdot \delta x + \omega \cdot \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) + \frac{d\omega}{dx} \cdot \left(Q - \dots \right) + \dots,$$

die gleich 0 gesetzt werden muß, wenn $\int f \cdot dx = M_i$ zu machen ist. Diese Formel wird richtig, sobald wir $dx = \text{const.}$ nehmen; dann lautet sie, wenn wir nunmehr die Grenzen x_0, x_1 noch berücksichtigen

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta f \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} \omega \cdot dx \cdot \left(M - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \dots \right) + \left[f \cdot \delta x + \omega \cdot \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) + \frac{d\omega}{dx} \cdot \left(Q - \dots \right) + \dots \right]_{x_0}^{x_1};$$

und sie unterscheidet sich von der, welche Lagrange in seinem Essai gefunden hatte, in der Weise, daß bei der Variabilität der Grenzwerte x_0, x_1 noch $f \cdot \delta x$ hinzutritt und δy in $\delta y + p \cdot \delta x$ übergeht: ein Resultat, welches, wie wir schon gesehen haben, später Lagrange in seinen Leçons wirklich ab-

leitete. Der unter dem Integral noch stehende Teil, gleich 0 gesetzt, giebt die Differentialgleichung zur Lösung des Problems, und die noch übrig bleibende Grenzungsgleichung

$$\left[f \cdot \delta x + \omega \cdot \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) + \frac{d\omega}{dx} \cdot \left(Q - \dots \right) + \dots \right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

hat, wenn wir annehmen, daß

$$\left[\omega \right]_{x_0}^{x_1} = \delta y_1 - \delta y_0 - p_1 \cdot \delta x_1 + p_0 \cdot \delta x_0$$

sei, die bekannte Form, wo sie durch die Variationen der Grenzwerte ausgedrückt wird. —

Es ward schon erwähnt, daß Lagrange zwar die Analogie zwischen einer Variation und der Differentiation von Anfang an betont, aber eine Begründung dieses Gedankens zu geben, nicht versucht hatte. Daher wurde es den Zeitgenossen und Nachfolgern schwer, sich völlig in diese Idee einzuarbeiten. Auch Euler bemühte sich, den Unterschied zwischen Variation und Differential klarzulegen und verfolgte diesen Gesichtspunkt in der Abhandlung*): „Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi“. Er denkt sich in der Funktion, die variiert werden soll, Konstante enthalten: die Zuwüchse dieser Konstanten erzeugen Zuwüchse der Funktion, welche er die Variationen nennt, während die Zuwüchse der unabhängigen Variabeln die Differentiale der Funktion geben.

Er stellt sich vor, die Größe sei nicht bloß von x , sondern gleichzeitig von x und t abhängig, so daß $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx$ das Differential von y , aber $\frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt$ die Variation wird. Um die Variation zu finden, muß x als konstant aufgefaßt und y nach t differenziert werden.

Sei nun f eine Funktion von $x, y, p, q, \dots$, so daß

$$df = N \cdot dx + M \cdot dy + P \cdot dp + Q \cdot dq \dots$$

werde, und soll die erste Variation von f , $\frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt$ gefunden werden, so haben wir zu schreiben

$$dx = 0, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt, \quad dp = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \cdot dt,$$

$$dq = \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \cdot dt, \dots,$$

*) novi Comment. Acad. Petrop. 1771; t. XVI.

und die gesuchte Variation lautet

$$A) \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt = M \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt + P \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \cdot dt + Q \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \cdot dt + \dots$$

Alsdann wird die Variation von $\int f \cdot dx$ berechnet, wo f dieselbe Bedeutung wie oben hat. Da sich die Integration bloss auf die Variablen x bezieht, so wird diejenige Vermehrung, welche das Integral erfährt, wenn man zu $y \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt$, zu

$p \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt$, etc. hinzufügt, die gesuchte Variation sein. Diese

Variation des Integrals ist aber $\int \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt \cdot dx$ oder, da t von der Integration unabhängig ist, $dt \cdot \int \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dx$; und nehmen wir aus A) den Wert von $\frac{\partial f}{\partial t}$, indem wir rechts mit dt dividieren, so erhalten wir

$dt \cdot \int \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dx = dt \int dx \cdot \left(M \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + P \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + Q \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} + \dots \right)$,
eine Formel, die wir mit Hilfe der teilweisen Integration überführen in

$$\begin{aligned} dt \cdot \int \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dx = & dt \cdot \int dx \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \left(M - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \dots \right) + \\ & + dt \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \left(P - \frac{dQ}{dx} + \dots \right) + \\ & + dt \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \cdot (Q - \dots) + \dots \end{aligned}$$

Für die Aufgaben des M_a^i muß diese erste Variation verschwinden, was auch t für einen Wert besitze, und dies liefert die wolbekannten Gleichungen.

Hieran schließt sich in der Euler'schen Schrift die analoge Ableitung der ersten Variation eines Doppelintegrals $\iint V \cdot dx \cdot dy$, und eine kurze Anwendung auf einige Aufgaben des M_g^i . —

Diese Auffassung der Variationsrechnung scheint aber zu schwerfällig und zu sehr an geometrische Vorstellungen gebunden zu sein. Jede Gleichung

$$y = \varphi(x, t),$$

in der t ein Parameter und φ eine stetige Funktion sein mag, stellt eine ganze Schaar von Kurven dar, worin alle durch dieselbe Ordinate verbundenen Punkte der Kurven ein und dieselbe Abscisse besitzen. In die Analysis übertragen,

lautet die Deutung von $y = \varphi(x, t)$ folgendermaßen: Eine Änderung des Parameters t führt stets eine Änderung der Funktion φ oder y herbei, ohne daß die unabhängige Variable x dabei andere Werte annimmt; und ist die Änderung von t unendlich klein, so wird es auch die von y sein.

Man kann daher sich auf diese Weise eine Erklärung davon geben, wie sich die Funktionsform ändern kann, während die unabhängige Variable denselben Wert behält. Aber sicher reicht eine derartige Auffassung nicht heran an die, welche Lagrange gehabt haben mag. Daher war es eine fruchtbare Arbeit, der sich die Nachfolger des Lagrange unterzogen, wenn sie auf analytische Weise der Frage nahetraten, wie die Analogie zwischen Differential- und Variationskalkül zu begründen sei. Lindelöf in seinem „Calcul de variations“ und Jellet in „An elementary treatise on the calculus of variations“ beschäftigen sich beide mit diesem Problem; die Wiedergabe ihrer Gedanken aber liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit. Man findet einen Auszug aus Jellet's Arbeit in „Mach, die Mechanik, in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt“, pag. 411 ff.

Lebenslauf.

Ich, Ernst Ludwig Anton, bin geboren zu Borna bei Leipzig, am 24. Oktober 1862, als Sohn des damaligen Advokaten und Notars Rudolf Anton. Nach Aneignung der Elementarkenntnisse in der dortigen Bürgerschule und in Privatstunden beim Herrn Archidiakonus Dr. Külz besuchte ich von Ostern 1874 an bis Ostern 1882 das kgl. Gymnasium zu Dresden-Neustadt, nachdem mein Vater 1873 als Geheimer Justizrat in das kgl. Justizministerium berufen worden war. Dort erlangte ich Ostern 1882 das Reifezeugnis und bezog alsdann die Universität Leipzig, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Hier hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren Hankel, Klein, Kolbe, Leuckart, Mayer, Von der Mühl, Masius, Maurenbrecher, Neumann, Scheibner, Voigt, Wundt, und beteiligte mich an den Übungen der Herren Hankel und Mayer. Allen diesen Herren spreche ich noch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus. — Im Sommer 1886 bestand ich die Prüfung für das höhere Schulamt vor der mathem.-physik. Abteilung der math.-naturw. Sektion zu Leipzig.

Lebenslauf

Ich, Ernst Ludwig Anton, bin geboren zu Bonn bei
Leipzig, am 24. Oktober 1862, als Sohn des damaligen Ad-
vokaten und Notars Rudolf Anton. Nach Aneignung der
Elementarkenntnisse in der hiesigen Bürgerschule und in
Privatstunden beim Herrn Archidirektor Dr. Kütz besuchte
ich von Ostern 1874 an bis Ostern 1882 das kgl. Gymnasium
zu Dresden-Neustadt, nachdem mein Vater 1873 als Gehei-
mer Justizrat in das kgl. Justizministerium berufen worden
war. Dort erlangte ich Ostern 1882 das Reifezeugnis und
bezog alsdann die Universität Leipzig, um Mathematik und
Naturwissenschaften zu studieren. Hier hörte ich die Vor-
lesungen der Herren Professoren Hankel, Klein, Kolbe,
Lienhard, Mayer, Von der Mühl, Masius, Menckner,
Neumann, Scheibner, Voigt, Wundt, und beteiligte mich an
den Übungen der Herren Hankel und Mayer. Allen diesen
Herren spreche ich noch an dieser Stelle meinen herzlichsten
Dank aus. — Im Sommer 1886 bestand ich die Prüfung für das
höhere Schulamt vor der mathem.-physik. Abteilung der math.-
naturw. Sektion zu Leipzig.

Fig. 1.

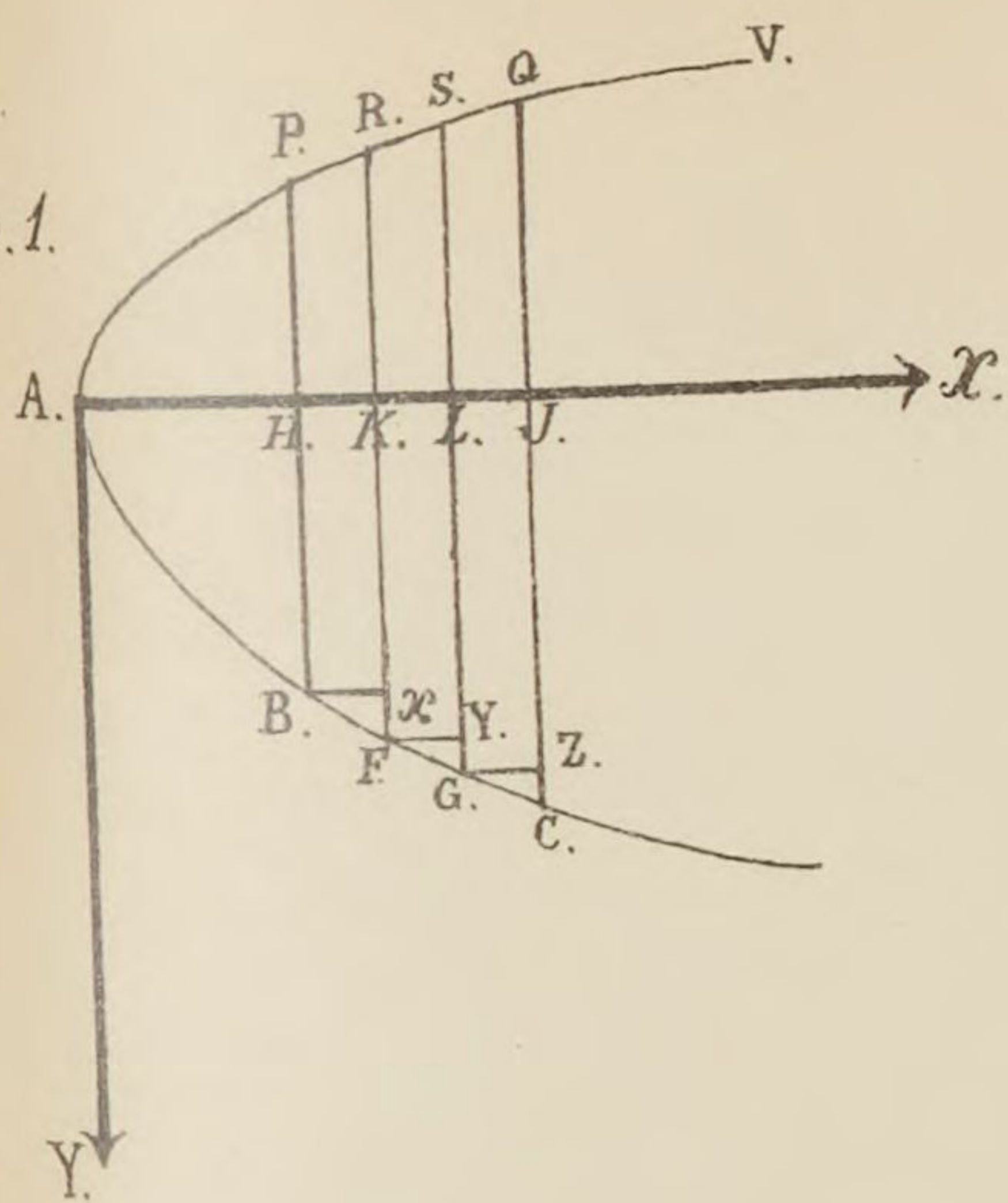


Fig. 2.

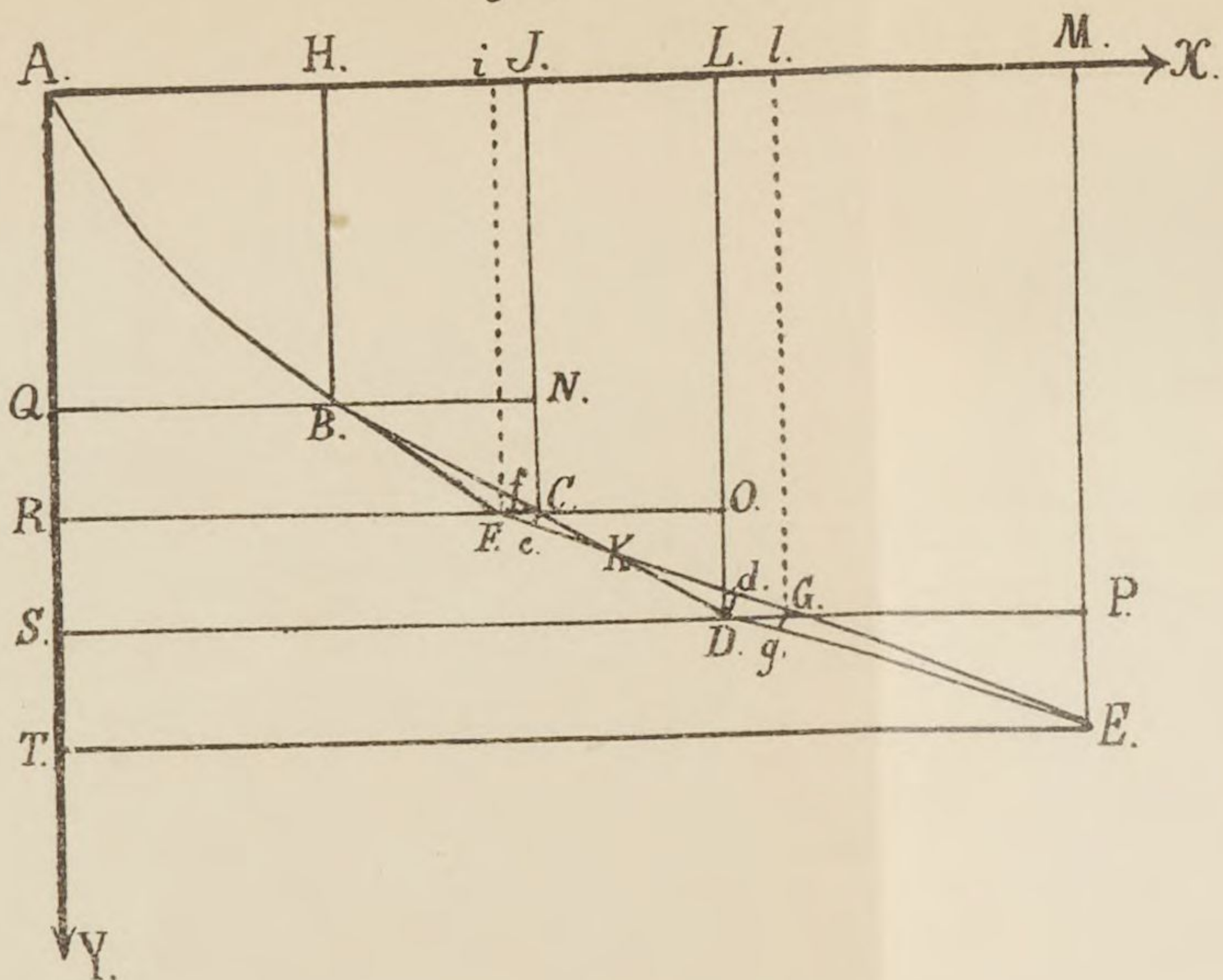


Fig. 3.

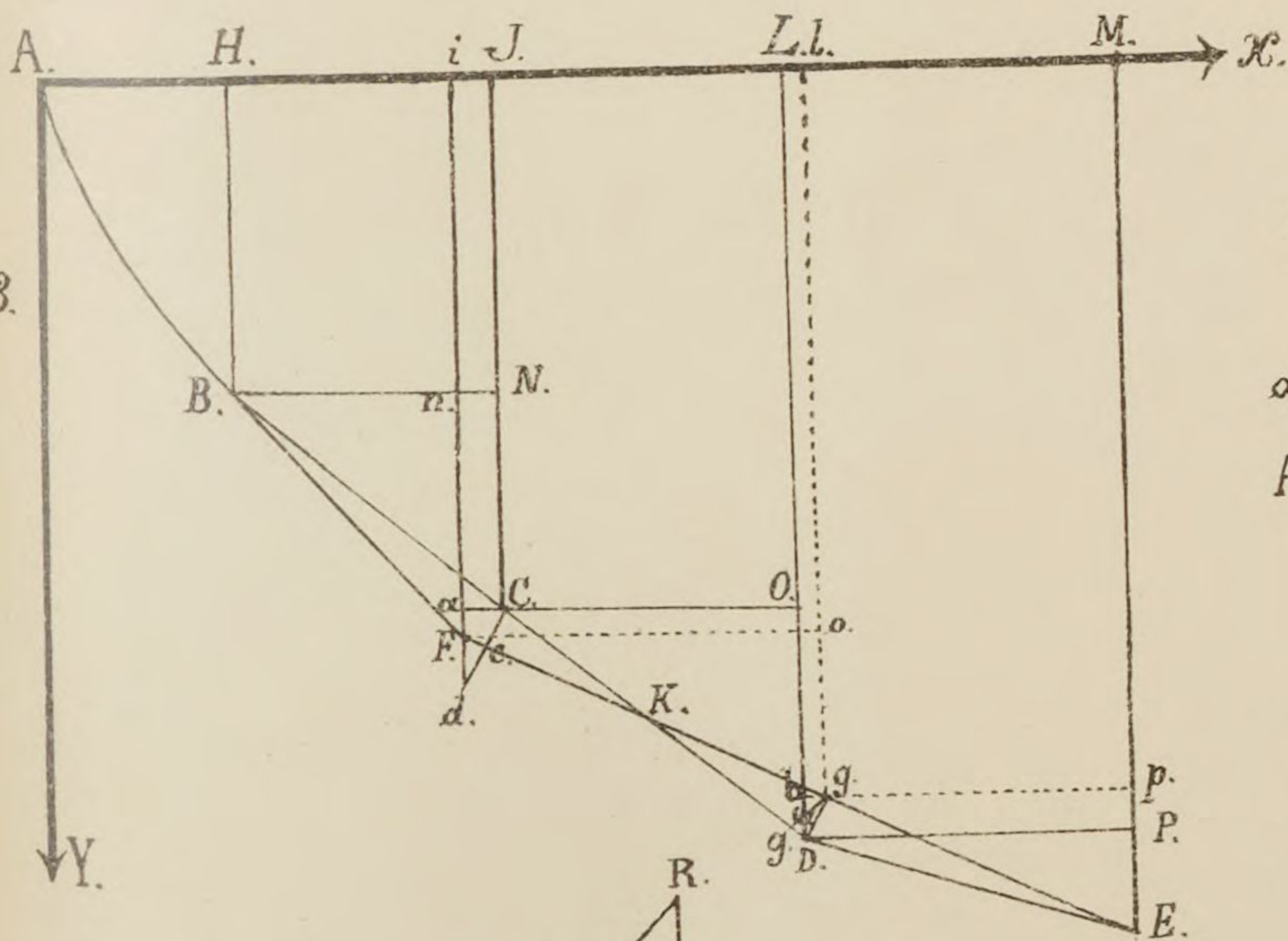


Fig. 4.

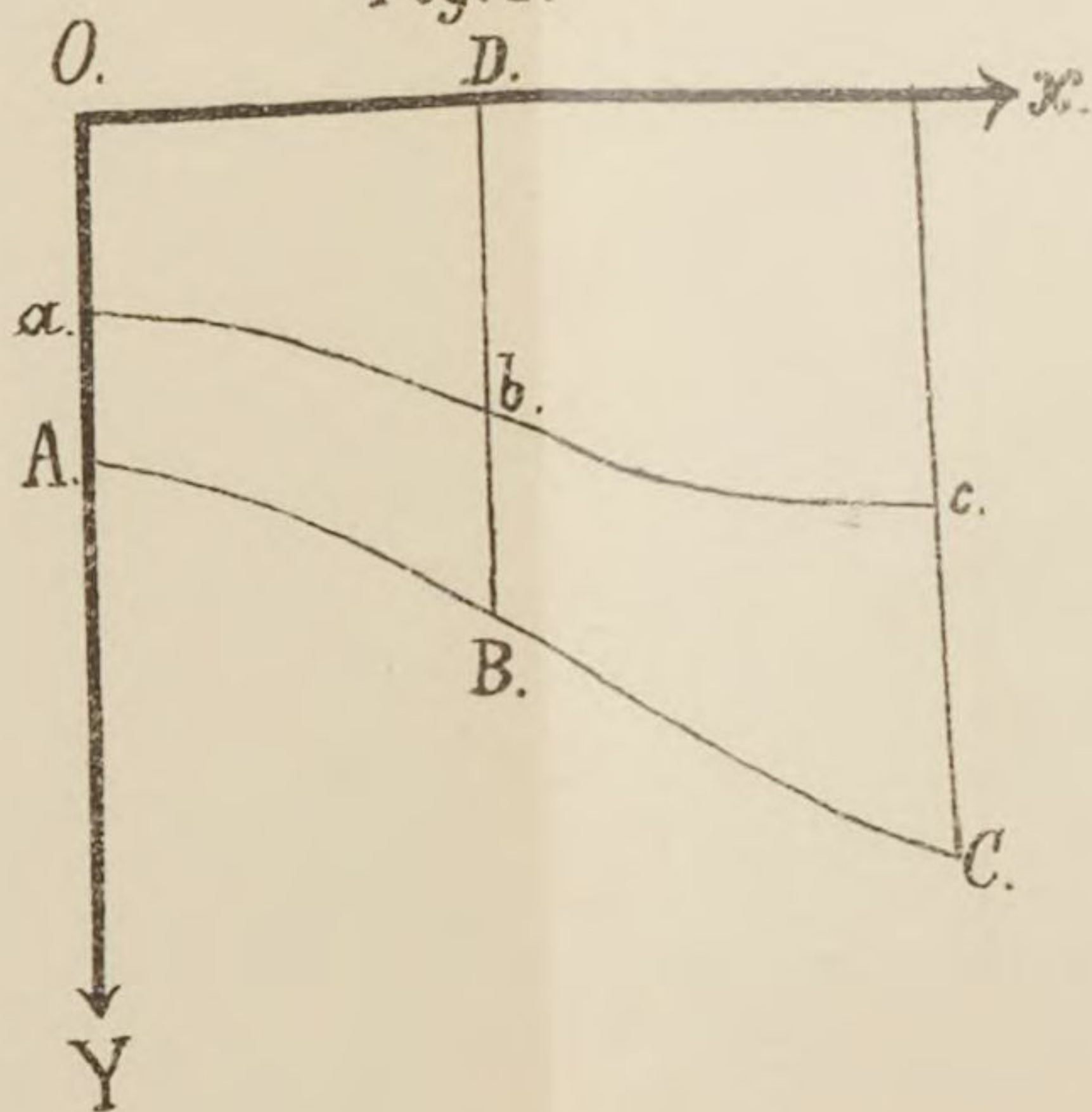


Fig. 5.

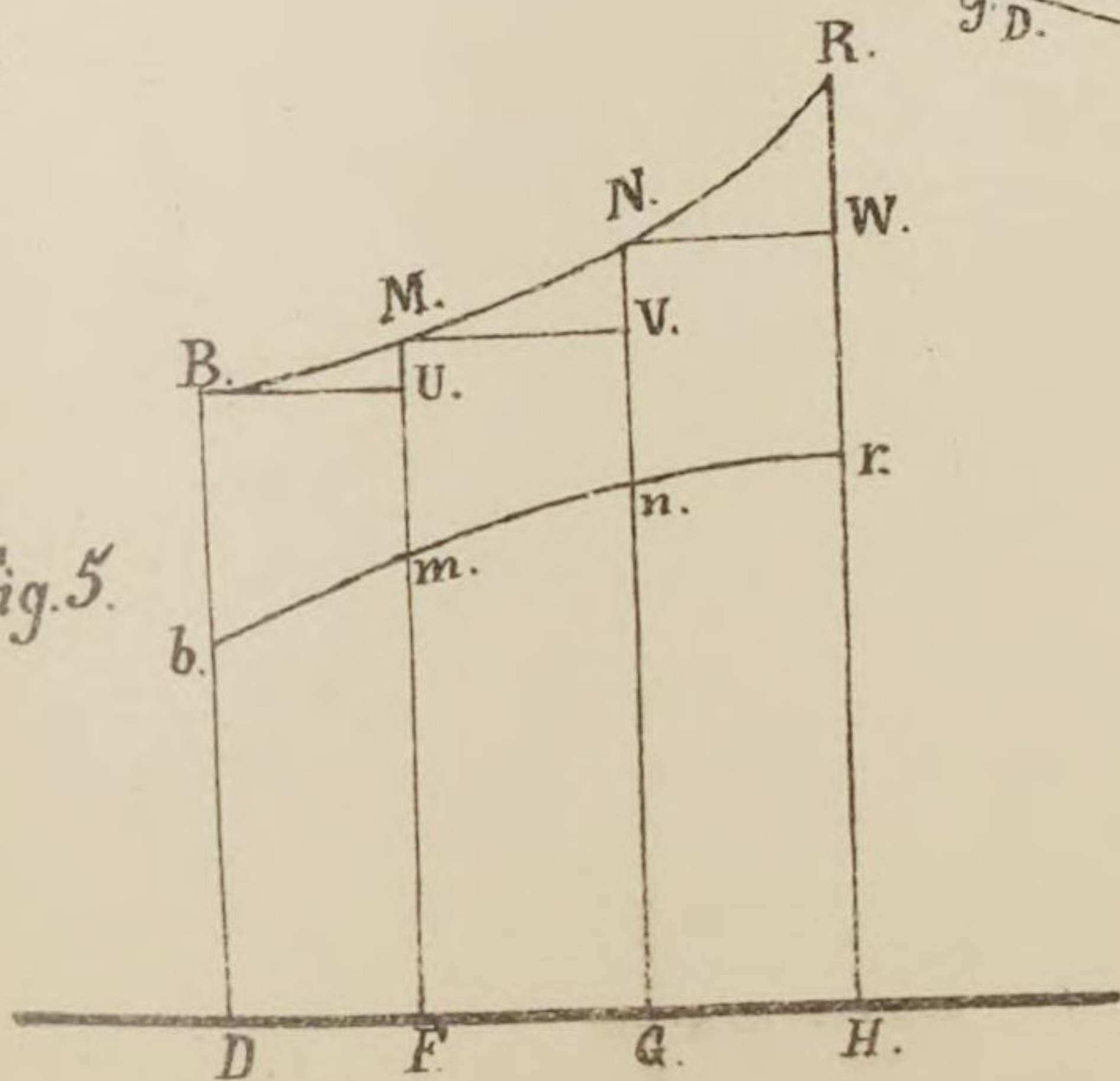
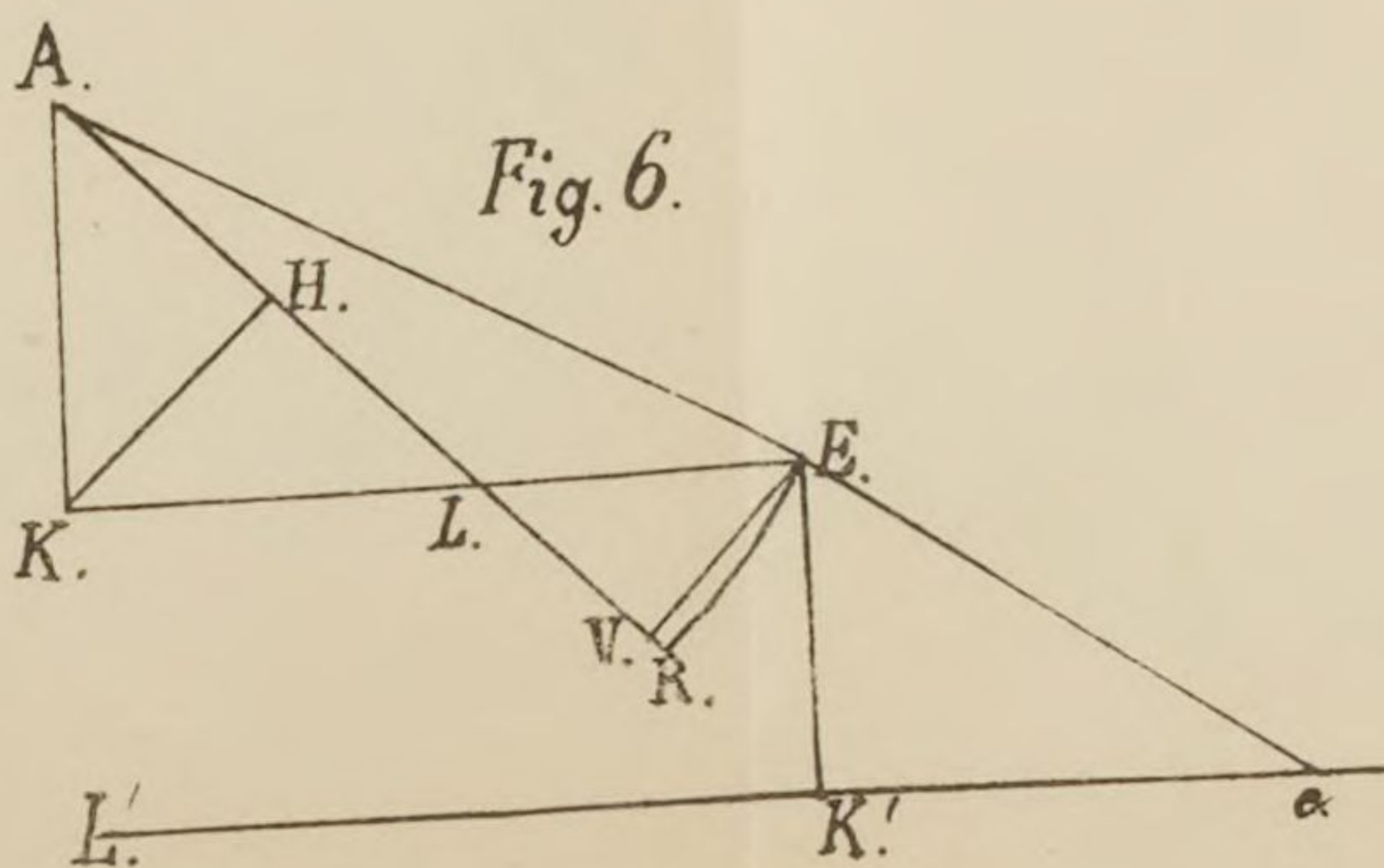
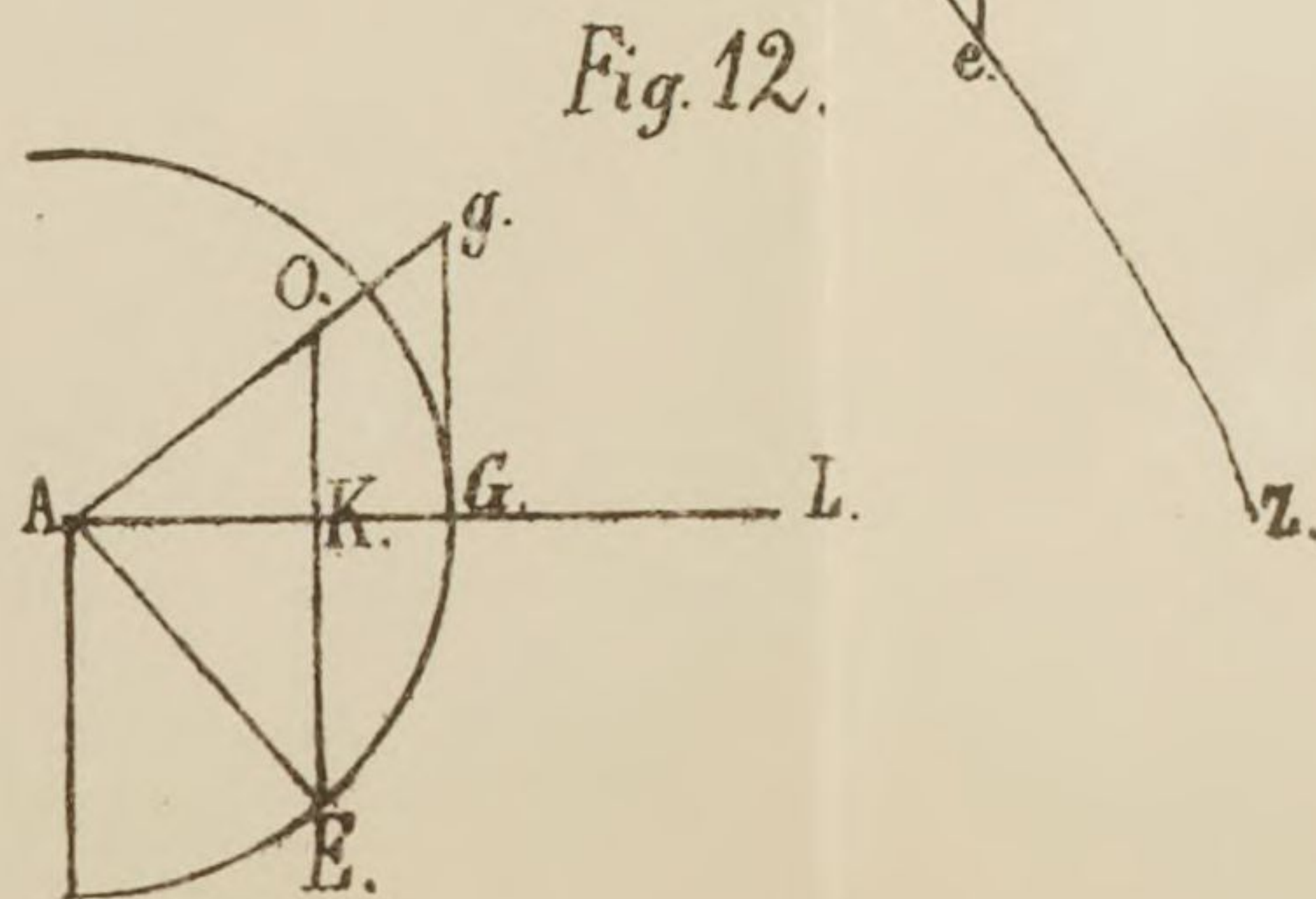
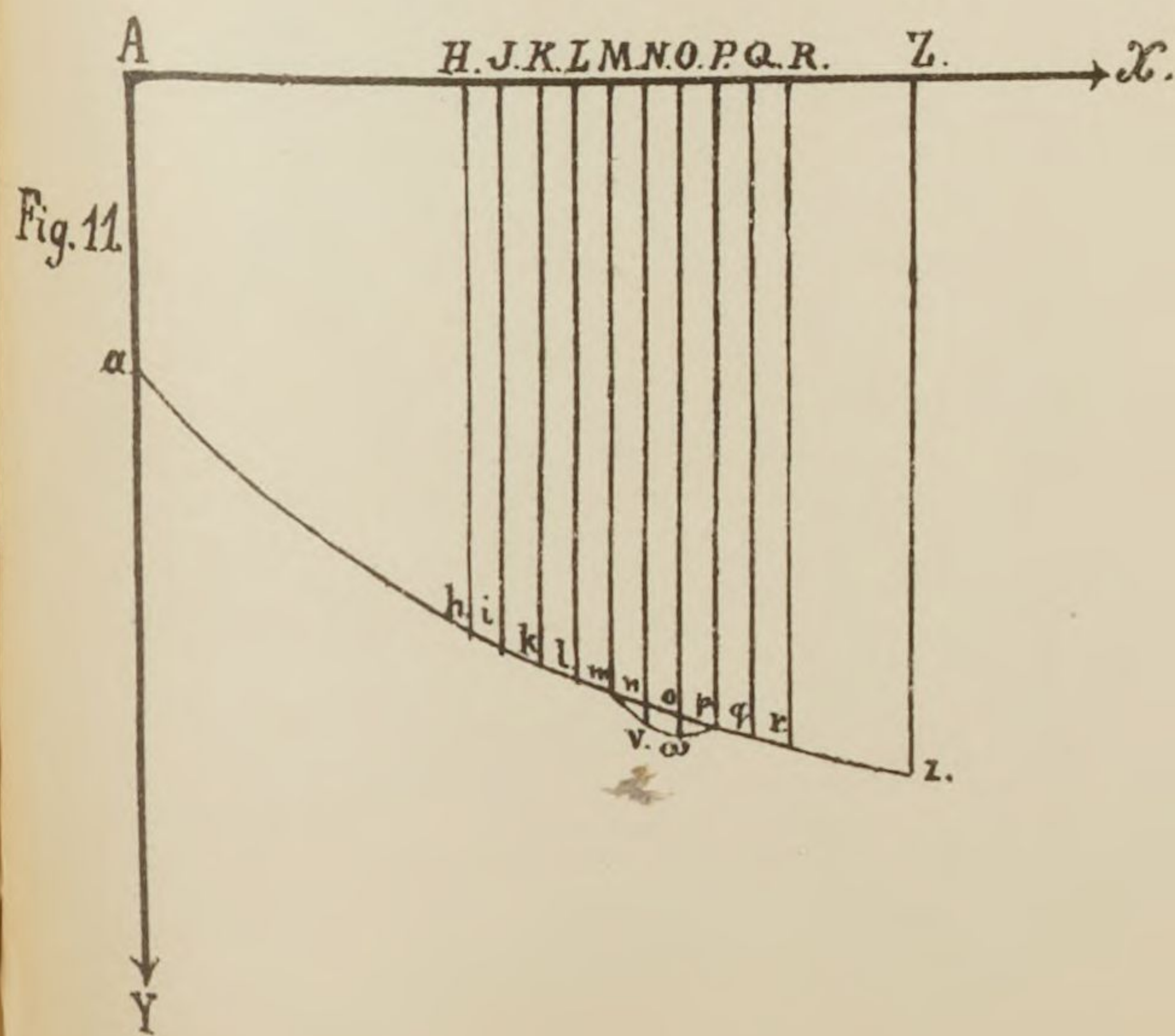
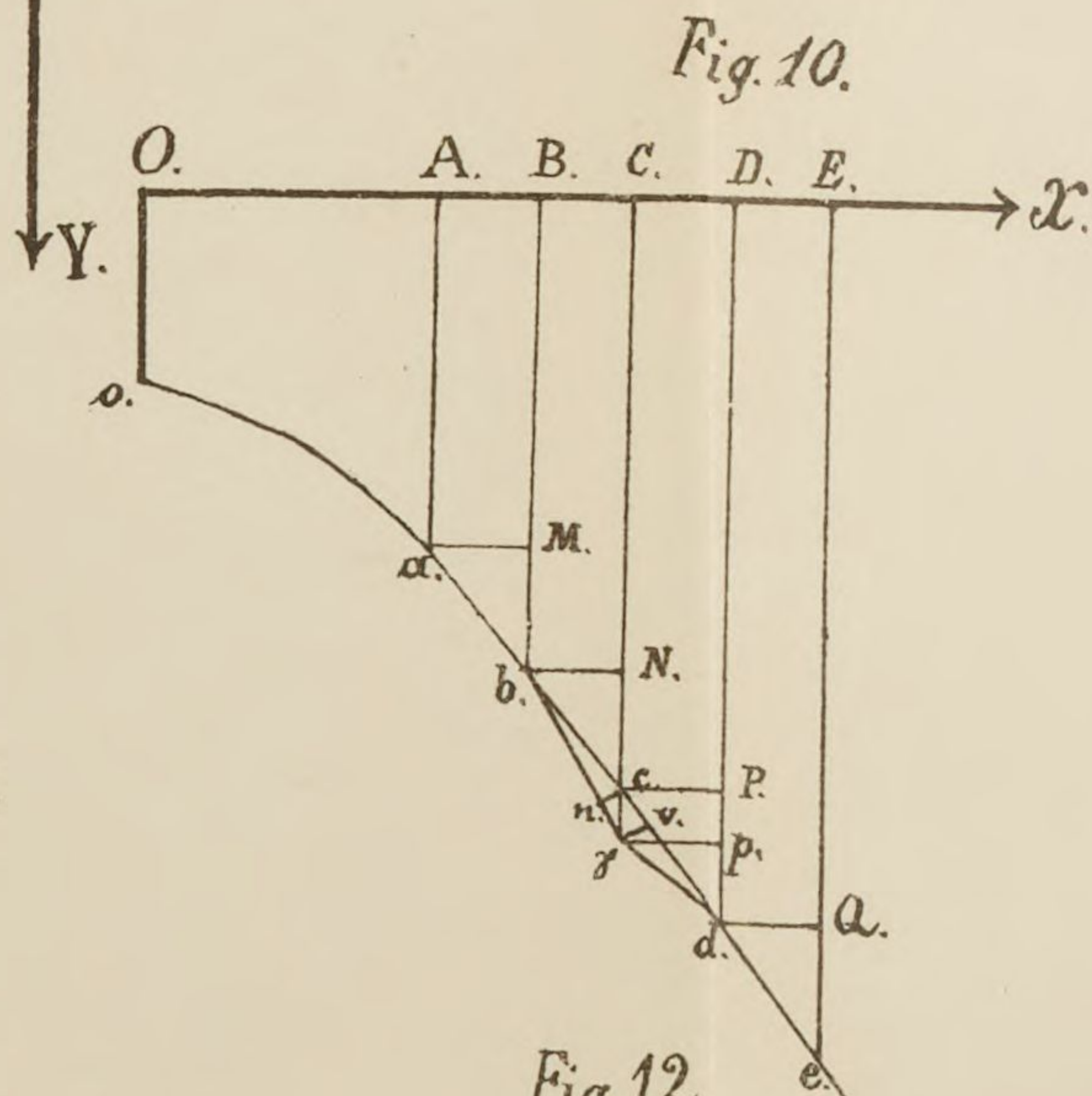
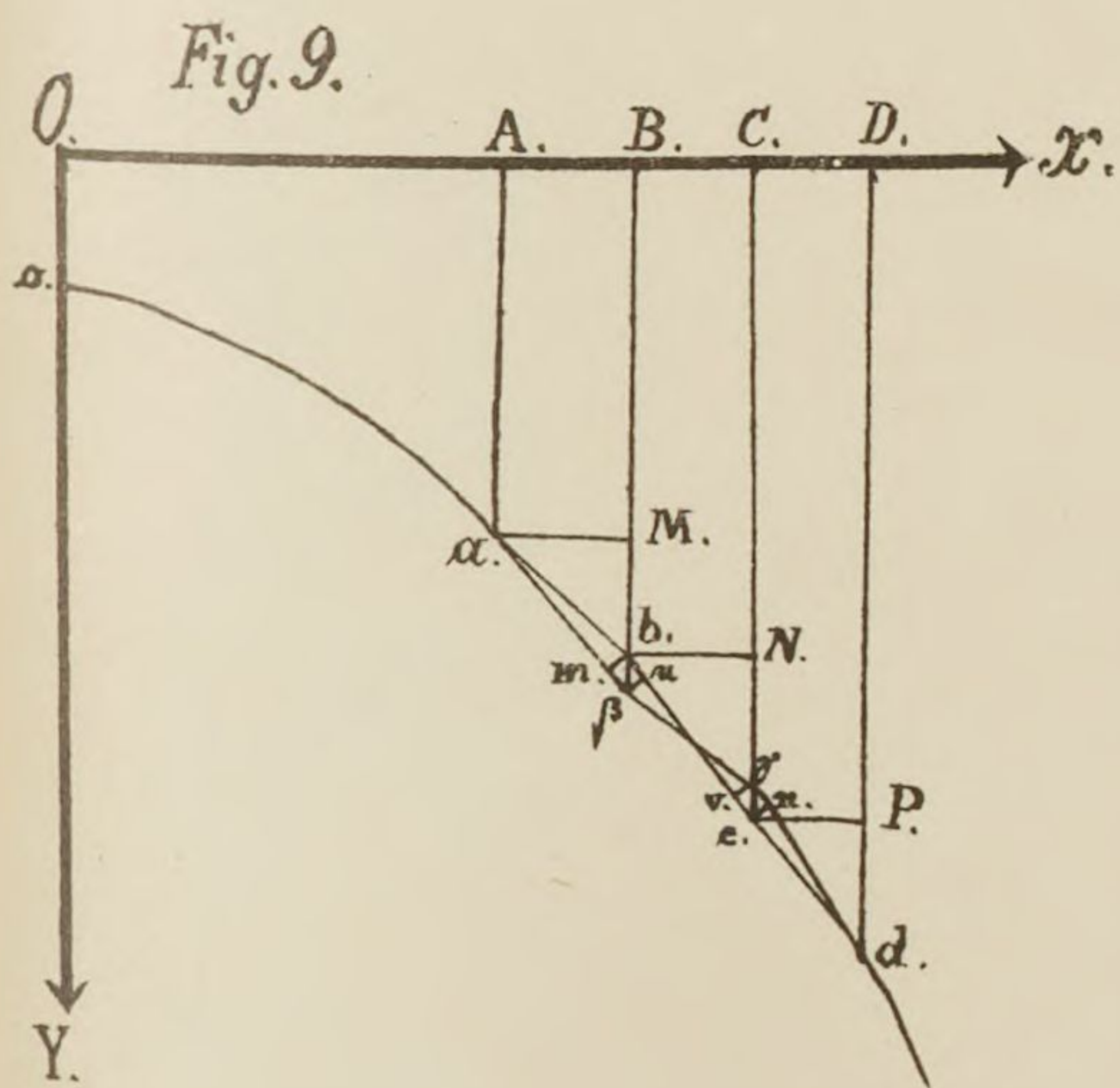
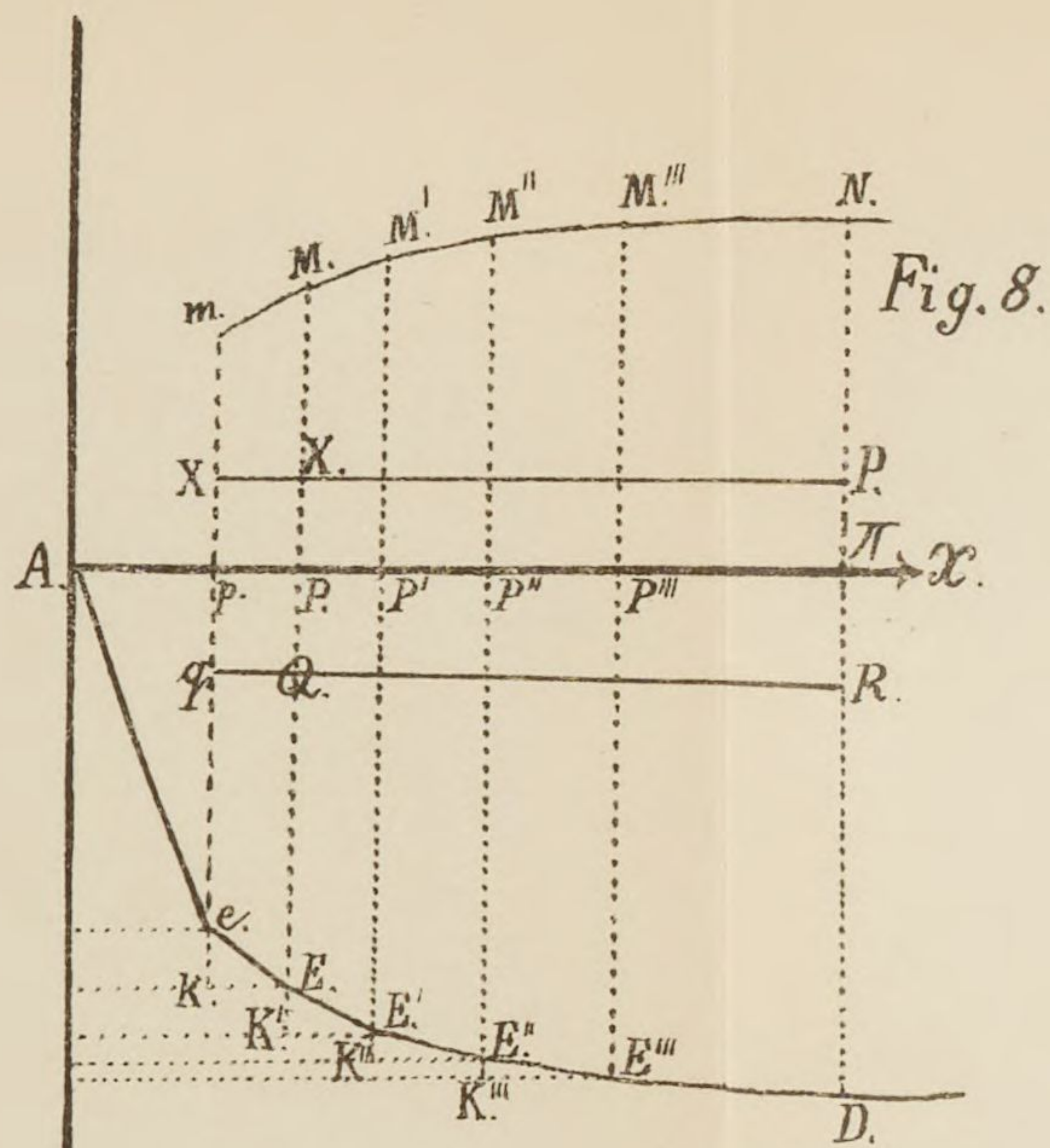
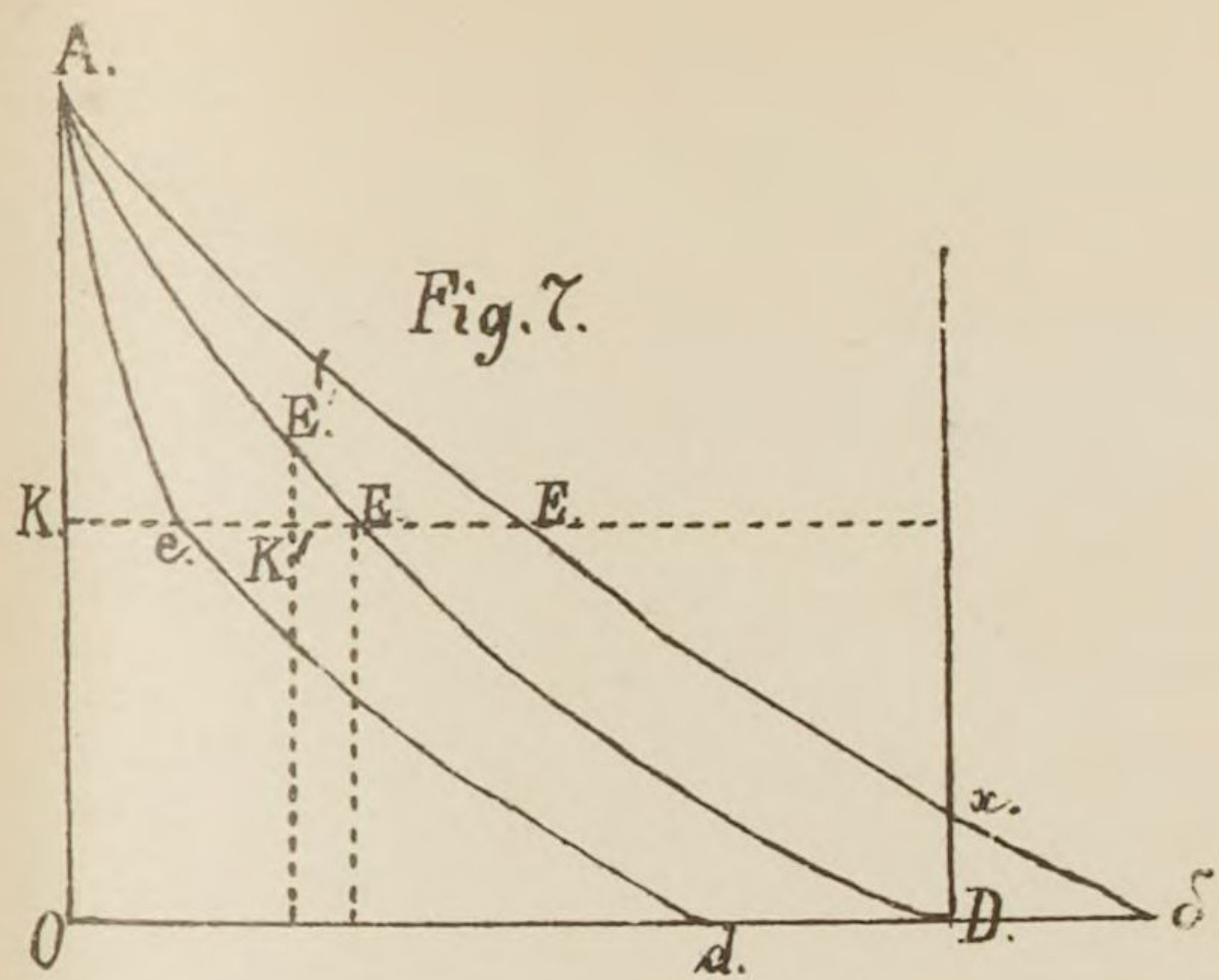


Fig. 6.





Anton, Ludwig

Geschichte des Isoperimetrischen Problems, eine geschichtliche Darstellung
der Variationsrechnung von Bernoulli bis Lagrange ...

Dresden 1888

Math.p. 315 bc#Beibd.2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651425-0